الإسم و الرقم الجامعي: [redacted]

جامعة البعث / كلية العلوم

امتحان مادة ميكانيك (1) لطلاب السنة الثانية / قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول للعام الدراسي 2015 – 2016

السؤال الأول: (40 درجة)

1. في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و مباشرة $OXYZ$, حدد مع الرسم الوسطاء الكروية والأسطوانية لتعيين نقطة M في الفراغ ثم اكتب عبارة متجه موضع النقطة في الجملتين و استنتج عبارتي سرعة النقطة في هاتين الجملتين.
2. إذا كانت $\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}$ ثلاث متجهات معرفة في الفراغ فاثبت أن $\left|\vec{a}+\vec{b}\ ,\ \vec{b}+\vec{c}\ ,\ \vec{c}+\vec{a}\right| = 2\left|\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}\right|$, حيث ان $\left|\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}\right|$ يرمز للجداء المختلط $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ للمتجهات الثلاثة.

السؤال الثاني: (25 درجة)

حقل قوىً مستوٍ كموني $\vec{F}$ تابع كمونه $V = \dfrac{Cos(\varphi)}{r}$, حيث أن r و φ هما الاحداثيان القطبيان لنقطة من الحقل في المستوي XOY. أثبت ان $\vec{F} = \dfrac{1}{r^2}\vec{e}$ حيث أن $\vec{e} = Cos(2\varphi)\vec{i} + Sin(2\varphi)\vec{j}$, ثم اوجد خطوط قوى و خطوط سوية الحقل ؟

السؤال الثالث: (35 درجة)

نابض أفقي ثابت مرونته $\mu = 245$ أحد أطرافه مثبت في النقطة A على المحور الأفقي OX و في طرفه الأخر كتلة $m_1 = 4$ يمكنها التحرك على مستوٍ أفقي أملس (بدون احتكاك) و الكتلة متوازنة في O.

اصطدمت قذيفة كتلتها $m_2 = 1$ متحركة بسرعة أفقية $u_0 = 350$ بالكتلة m_1 (كما هو مبين في الشكل) و اتحدت معها و بدأت الكتلة الجديدة $M = m_1 + m_2$ بالحركة, و المطلوب

1. عين السرعة الابتدائية v_0 لحركة الكتلة M على المحور OX بعد الصدم.
2. اكتب معادلات حركة الكتلة M بعد الصدم و استنتج قانون حركتها, ثم بين نوع هذه الحركة و ادرسها.

انتهت الأسئلة

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

مدرس المقرر: الدكتور محمد العلي

جامعة البعث / كلية العلوم / قسم الرياضيات

سلم تصحيح مادة الميكانيك (1)، لطلاب السنة الثانية / رياضيات

امتحان الدورة الاستثنائية للعام الدراسي 2015 – 2016

السؤال الأول: (30 + 10 = 40 درجة)

<table>
<tr>
<td>

1. تعرف الإحداثيات الأسطوانية لنقطة في الفراغ بالعلاقات التالية

$$\begin{cases} \rho = \left\| \overrightarrow{OM_{xy}} \right\| \\ \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM_{xy}}} \right) \\ z = \left\| \overrightarrow{OM_z} \right\| \end{cases}$$

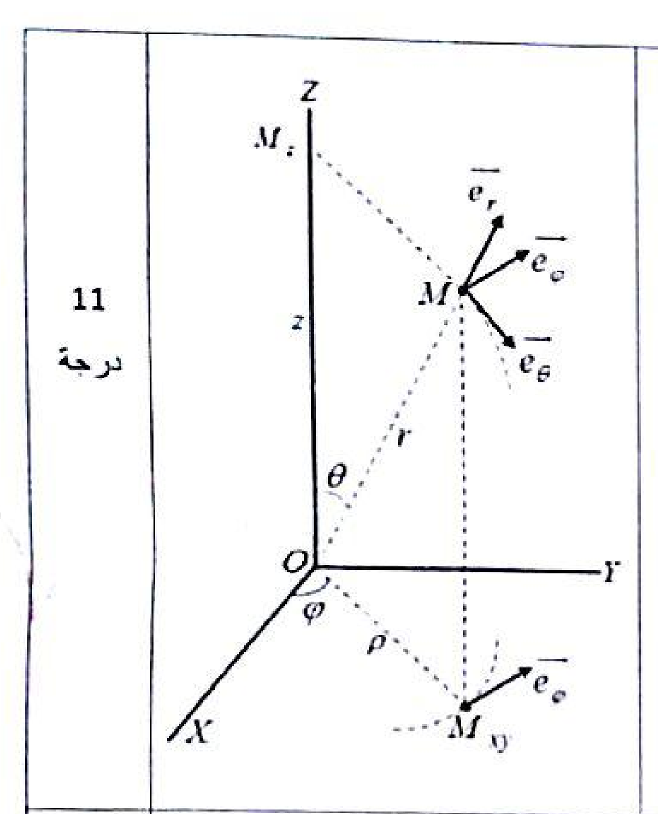
و نضع $M\left(\rho, \varphi, z\right)$.

أما الإحداثيات الكروية للنقطة فتعرف بالعلاقات التالية

$$\begin{cases} r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| \\ \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}} \right) \\ \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM_{xy}}} \right) \end{cases}$$

و نضع $M\left(r, \theta, \varphi\right)$.

</td>
<td>



</td>
<td>11 درجة</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

كما نلاحظ أن متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ يعطى في هذه الإحداثيات بالشكل

$$\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{e_\rho} + z\, \overrightarrow{e_z} \quad , \quad \overrightarrow{OM} = r \overrightarrow{e_r}$$

</td>
<td>4 درجات</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

و بما أن

$$\dot{\overrightarrow{e_r}} = \dot{\theta}\, \overrightarrow{e_\theta} + \dot{\varphi}\, Sin(\theta) \overrightarrow{e_\varphi} \quad , \quad \dot{\overrightarrow{e_\rho}} = \dot{\varphi}\, \overrightarrow{e_\varphi} \quad , \quad \dot{\overrightarrow{e_z}} = \vec{0}$$

</td>
<td>9 درجات</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

لإيجاد عبارتي متجه السرعة في الإحداثيات الأسطوانية و كروية نشتق متجه الموضع و نعوض فنجد

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}\left(r \overrightarrow{e_r}\right) = \dot{r}\, \overrightarrow{e_r} + r\, \dot{\overrightarrow{e_r}} = \dot{r}\, \overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\, \overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\varphi}\, Sin(\theta) \overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}\left(\rho \overrightarrow{e_\rho} + z\, \overrightarrow{e_z}\right) = \dot{\rho}\, \overrightarrow{e_\rho} + \rho\, \dot{\overrightarrow{e_\rho}} + \dot{z}\, \overrightarrow{e_z} + z\, \dot{\overrightarrow{e_z}} = \vec{V} = \dot{\rho}\, \overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\, \overrightarrow{e_\varphi} + \dot{z}\, \overrightarrow{e_z}$$

</td>
<td>6 درجات</td>
</tr>
</table>

10 درجات	لإثبات صحة العلاقة نستخدم خواص الجداء المختلط كما يلي $\left\|\vec{a}+\vec{b}\ ,\ \vec{b}+\vec{c}\ ,\ \vec{c}+\vec{a}\right\| = \left\|\vec{a}\ ,\ \vec{b}+\vec{c}\ ,\ \vec{c}+\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\ ,\ \vec{b}+\vec{c}\ ,\ \vec{c}+\vec{a}\right\|$ $= \left\|\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}+\vec{a}\right\| + \left\|\vec{a}\ ,\ \vec{c}\ ,\ \vec{c}+\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}+\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\ ,\ \vec{c}\ ,\ \vec{c}+\vec{a}\right\|$ $= \left\|\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}+\vec{a}\right\| + \left\|\vec{a}\ ,\ \vec{c}\ ,\ \vec{c}+\vec{a}\right\| + 0 + \left\|\vec{b}\ ,\ \vec{c}\ ,\ \vec{c}+\vec{a}\right\|$ $= \left\|\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}\right\| + \left\|\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{a}\right\| + \left\|\vec{a}\ ,\ \vec{c}\ ,\ \vec{c}\right\| + \left\|\vec{a}\ ,\ \vec{c}\ ,\ \vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\ ,\ \vec{c}\ ,\ \vec{c}\right\| + \left\|\vec{b}\ ,\ \vec{c}\ ,\ \vec{a}\right\|$ $= \left\|\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}\right\| + 0 + 0 + 0 + 0 + \left\|\vec{b}\ ,\ \vec{c}\ ,\ \vec{a}\right\| = \left\|\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}\right\| + \left\|\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}\right\| = 2\left\|\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}\right\| \Rightarrow$ $\left\|\vec{a}+\vec{b}\ ,\ \vec{b}+\vec{c}\ ,\ \vec{c}+\vec{a}\right\| = 2\left\|\vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{c}\right\|$

السؤال الثاني: (25 درجة)

15 درجة	نعلم أن $\begin{cases} x = r\ Cos(\varphi) \\ y = r\ Sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r\ Cos(\varphi) = x \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$ بالتعويض في تابع كمون الحقل نجد أن $V = \dfrac{Cos(\varphi)}{r} = \dfrac{r\ Cos(\varphi)}{r^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow$ $\vec{F} = -\overrightarrow{Grad}(V) = -\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{j}\right) = -\left(\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\vec{i} + \dfrac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\vec{j}\right)$ $= \dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left[\left(x^2-y^2\right)\vec{i} + 2xy\ \vec{j}\right]$ $= \dfrac{1}{r^4}\left[r^2\left(Cos^2(\varphi) - Sin^2(\varphi)\right)\vec{i} + 2r^2\ Sin(\varphi)Cos(\varphi)\ \vec{j}\right]$ $= \dfrac{1}{r^2}\left[Cos(2\varphi)\ \vec{i} + Sin(2\varphi)\ \vec{j}\right] = \dfrac{1}{r^2}\vec{e}\quad ;\quad \vec{e} = Cos(2\varphi)\vec{i} + Sin(2\varphi)\vec{j}$
5 درجات	تعطى خطوط سوية الحقل بالعلاقة $V = C \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+y^2} = C \Rightarrow x = C\left(x^2+y^2\right)$

5 درجات	خطوط القوة فتعطى بالمعادلات التفاضلية $$\frac{dx}{F_x}=\frac{dy}{F_y} \Rightarrow \frac{dx}{\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}}=\frac{dy}{\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}} \Rightarrow \frac{dx}{x^2-y^2}=\frac{dy}{2xy}$$ $$\Rightarrow 2xy\ dx+\left(y^2-x^2\right)dy=0 \Rightarrow 2\frac{y}{x}\ dx+\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2-1\right)dy=0$$ نضع $u=\frac{y}{x}$ فيكون $y=xu$ و يكون $dy=u\ dx+x\ du$. و بالتعويض نجد أن $$2u\ dx+\left(u^2-1\right)\left(u\ dx+x\ du\right)=0 \Rightarrow u\left(u^2+1\right)dx+x\left(u^2-1\right)du=0$$ $$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{u^2-1}{u\left(u^2+1\right)}du=0 \Rightarrow \frac{dx}{x}+\left(\frac{2u}{u^2+1}-\frac{1}{u}\right)du=0 \Rightarrow$$ $$Ln(x)+Ln\left(u^2+1\right)-Ln(u)=Ln(C) \Rightarrow x\left(u^2+1\right)u=C \Rightarrow$$ $$\left(y^2+x^2\right)y=C\ x^2$$ و هي معادلات خطوط الحقل المعطى حيث أن C هو ثابت اختياري.

السؤال الثالث: (35 درجة)

10 درجات		1. يوضح الشكل (1) المجاور وضعي الجملة قبل و بعد الصدم. بملاحظة أن القوى المؤثرة على الكتلتين أثناء الصدم هي قوى شاقولية مساقطها على محور الحركة الأفقي OX معدومة, فإن مسقط كمية حركة الجملة على المحور OX ثابت قبل و بعد الصدم.
5 درجات	$$m_1\times 0+m_2\ u_0=\left(m_1+m_2\right)v_0 \Rightarrow v_0=\frac{m_2}{m_1+m_2}u_0=\frac{1}{5}\times 350=70$$	

• نلاحظة أن القوى المؤثرة على الكتلة M أثناء حركتها بعد الصدم و كما هي مبينة في الشكل (1) هي

قوة ثقل الكتلة $\vec{F_1} = (m_1 + m_2)\vec{g}$ و

قوة مرونة (شد) النابض $\vec{F_2} = -\mu x \ \vec{e_x}$ و

قوة رد فعل مستوي الاستناد الأملس $\vec{F_3}$.

و لدراسة الحركة بعد الصدم, نطبق المبدأ الأساسي في التحريك على حركة الكتلة M فنجد أن

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = M \ \vec{\Gamma} \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2)\vec{g} - \mu x \ \vec{e_x} + \vec{F_3} = (m_1 + m_2)\vec{\Gamma}$$

و بالإسقاط على محور الحركة OX نجد أن

$$0 - \mu x + 0 = (m_1 + m_2)x^{\cdot\cdot} \quad \Rightarrow \quad x^{\cdot\cdot} + \frac{\mu}{m_1 + m_2}x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x^{\cdot\cdot} + 49 x = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

و هي المعادلة التفاضلية لحركة الكتلة M و نلاحظ أنها معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة.

15

درجة

لحلها نكتب المعادلة المميزة الموافقة لها و هي $\lambda^2 + 49 = 0$ لنجد أن $\lambda_{1,2} = \mp 7 i$. و بالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية $(*)$ يعطى بالشكل

$$x = c_1 \ Sin(7 t) + c_2 \ Cos(7 t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (**)$$

و بتعويض شروط البدء حيث أنه عندما كانت $t = 0$ كانت $x = 0$ و $x^{\cdot} = 70$, نجد أن

$$\begin{cases} x = c_1 \ Sin(7 t) + c_2 \ Cos(7 t) \\ x^{\cdot} = 7 \ c_1 \ Cos(7 t) + 7 \ c_2 \ Sin(7 t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = c_2 \\ 70 = 7 \ c_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 10 \end{cases}$$

و بالتعويض في عبارة الحل العام $(**)$ نجد أن قانون حركة الكتلة M يعطى بالشكل

$$\boxed{x = 10 \ Sin(7 t)}$$

و هو القانون الزمني لحركة الكتلة M و يمثل حركة مستقيمة اهتزازية توافقية مركزها مبدأ الإحداثيات $x = 0$ و مطالها $x_{Max} = 10$ و صفحتها الابتدائية $\varphi = 0$ و دورها $\frac{2\pi}{7}$.

5

درجات

..................انتهى السلم (اربع صفحات)..................

مدرس المقرر: الدكتور محمد العلي

جامعة البعث / كلية العلوم

الاسم و الرقم الجا

امتحان الدورة الاستثنائية للعام الدراسي 2014 – 2015

مادة الميكانيك (1)، لطلاب السنة الثانية / رياضيات

السؤال الأول: (20 درجة)

في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و مباشرة $OXYZ$، حدد مع الرسم الوسطاء الكروية لتعيين نقطة M في الفراغ ثم اكتب موضع النقطة في هذه الجملة و استنتج عبارة سرعة النقطة فيها.

السؤال الثاني: (25 درجة)

تتحرك نقطة P في المستوي XOY بحيث تحقق إحداثياتها القطبية (ρ,φ) العلاقتين التالية

$$\rho = 3\,Cos\varphi \quad ; \quad t = \frac{1}{4}\left(2\varphi + Sin(2\varphi)\right)$$

اثبت أن حركة النقطة تخضع لقانون السطوح، ثم عين منحيها سرعة و تسارع هذه النقطة ؟

السؤال الثالث: (25 درجة)

حقل مركزي جاذب مركزه النقطة $A\,(0,0,-1)$ و يتناسب عكساً مع مكعب البعد عن هذا المركز بثابت تناسب λ، و المطلوب

1. عين هذا الحقل، ثم اثبت أنه حقل كموني و أوجد تابع كمونه
2. احسب العمل الذي ينجزه متجه الحقل عندما تنتقل النقطة من الموضع $B\,(1,2,1)$ إلى الموضع $C\,(3,2,1)$ ؟

السؤال الرابع: (30 درجة)

نابض شاقولي معامل مرونته $\mu = 400$ معلق من طرفه العلوي في نقطة ثابتة A، أما طرفه الحر فهو مستقر في الموضع O. بعد تعلي مقدارها $m = 0.2$ في طرفه الحر، استطال النابض و استقر في الموضع O'. فعندما نسحب الكتلة عن موضع توازنها O' مسافة م $a = 0.01$ باتجاه الأسفل و تركت لتتحرك بدون سرعة ابتدائية ضمن سائل معامل مقاومته لحركة الكتلة $\alpha = 16$.

على اعتبار أن تسارع الجاذبية الأرضية هو $g = 10$، المطلوب:

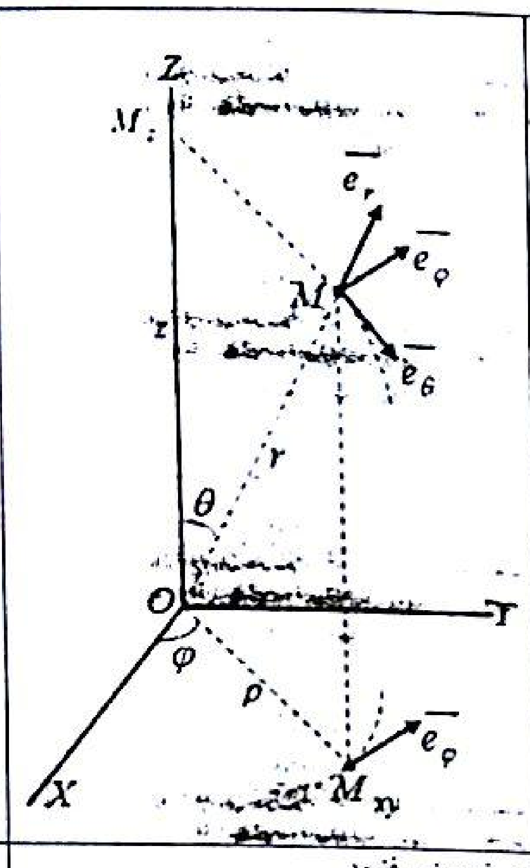
1. احسب a_0 مقدار استطالة النابض بعد تعليق الكتلة في طرفه الحر و استقرارها في الموضع O'.
2. عين معادلة حركة الكتلة، ثم أوجد القانون الزمني لحركتها.

مدرس المقرر: الدكتور محمد العا

انتهت الأسئلة

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

السؤال الأول: (20 درجة)

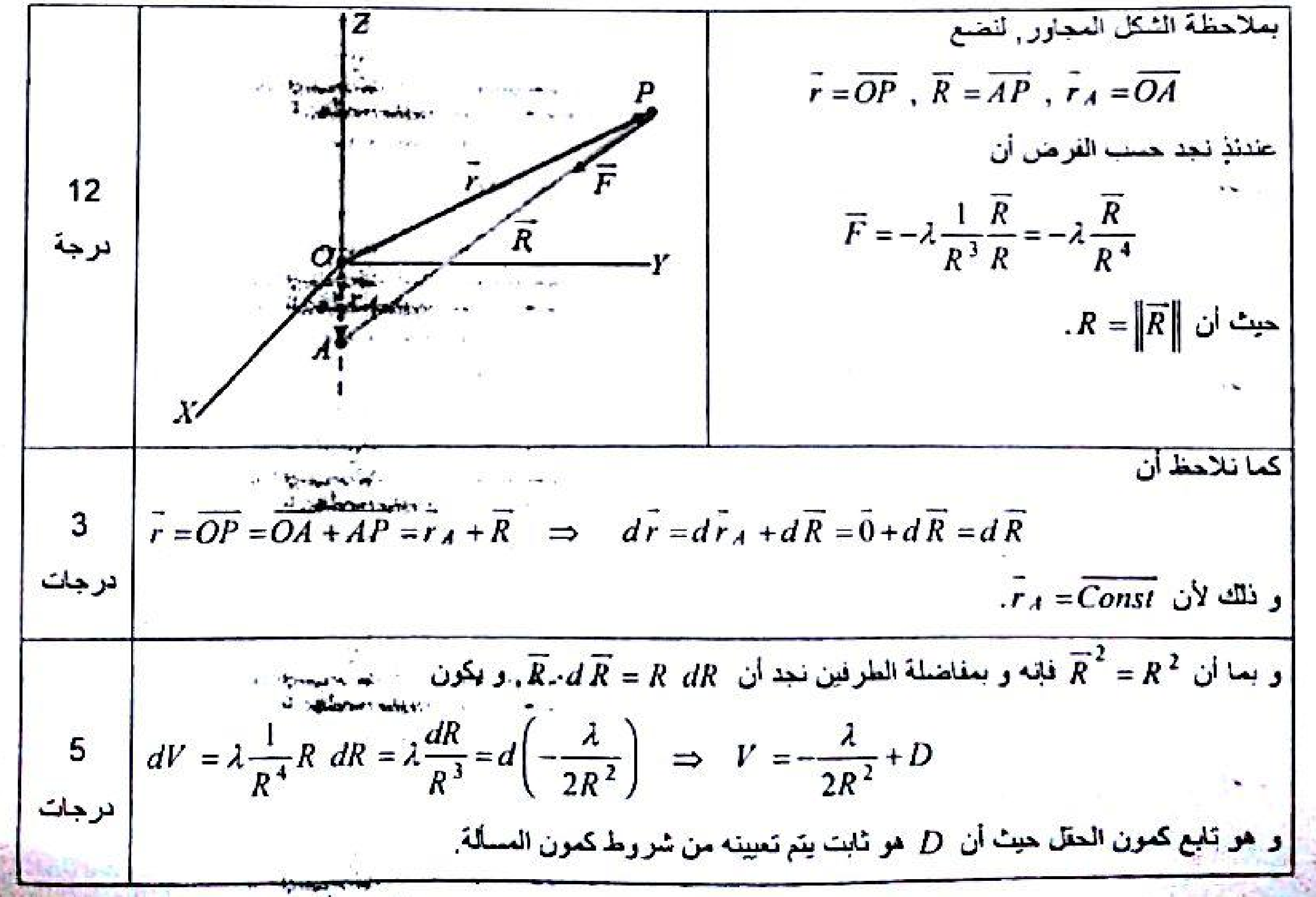
1. تعرف الإحداثيات الكروية للنقطة بالعلاقات التالية $$\begin{cases} r = \left\| \overline{OM} \right\| \\ \theta = \left(\widehat{\overline{OZ}, \overline{OM}}\right) \\ \varphi = \left(\widehat{\overline{OX}, \overline{OM}_{xy}}\right) \end{cases}$$ و نضع $M(r,\theta,\varphi)$. و نلاحظ أن متجه الموضع $\overline{OM}$ يعطى في هذه الإحداثيات بالشكل $$\overline{OM} = r\overline{e_r}$$ كما نعلم أن $$\dot{\overline{e_r}} = \dot{\theta}\overline{e_\theta} + \dot{\varphi}Sin(\theta)\overline{e_\varphi}$$		15 درجة
لإيجاد عبارة متجه السرعة في الإحداثيات الكروية نشتق متجه الموضع و نعوض فنجد $$\overline{V} = \frac{d}{dt}\overline{OM} = \frac{d}{dt}\left(r\overline{e_r}\right) = \dot{r}\overline{e_r} + r\dot{\overline{e_r}} = \dot{r}\overline{e_r} + r\dot{\theta}\overline{e_\theta} + r\dot{\varphi}Sin(\theta)\overline{e_\varphi}$$		5 درجات

السؤال الثاني: (25 درجة)

الحل: نلاحظ أن $$dt = \frac{1}{4}\left(2 + 2Cos(2\varphi)\right)d\varphi = \frac{\left(1 + Cos(2\varphi)\right)}{2}d\varphi = Cos^2(\varphi)d\varphi \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{1}{Cos^2(\varphi)} \Rightarrow$$ $$\rho^2\dot{\varphi} = \left(\alpha\ Cos(\varphi)\right)^2\frac{1}{Cos^2(\varphi)} = \alpha^2 = C$$ و بالتالي فإن حركة النقطة المعطاة خاضعة لقانون السطوح.	10 درجات

6 درجات	لإيجاد متجها سرعة و تسارع الحركة نستخدم دستورا بينيه الأول و الثاني, حيث نجد أن $u=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\alpha\, Cos(\varphi)} \Rightarrow u'_\varphi=\frac{Sin(\varphi)}{\alpha\, Cos^2(\varphi)} \quad \& \quad u''_\varphi=\frac{1}{\alpha\, Cos(\varphi)}+\frac{2Sin^2(\varphi)}{\alpha\, Cos^3(\varphi)}$
9 درجات	و باستخدام دستورا بينيه نجد أن $\overline{V}=C\left(-\frac{du}{d\varphi}\overline{e_\rho}+u\overline{e_\varphi}\right)=\alpha^2\left[-\frac{Sin(\varphi)}{\alpha\, Cos^2(\varphi)}\overline{e_\rho}+\frac{1}{\alpha\, Cos(\varphi)}\overline{e_\varphi}\right] \Rightarrow$ $\overline{V}=\frac{\alpha}{Cos(\varphi)}\left[-Tan(\varphi)\overline{e_\rho}+\overline{e_\varphi}\right]$ $\overline{\Gamma}=-C^2u^2\left(u''_\varphi+u\right)\overline{e_\rho}=-\frac{2\alpha}{Cos^5(\varphi)}\overline{e_\rho}$

السؤال الثالث: (25 درجة)



12 درجة	بملاحظة الشكل المجاور, لنضع $\vec{r}=\overline{OP}\ ,\ \overline{R}=\overline{AP}\ ,\ \vec{r}_A=\overline{OA}$ عندئذٍ نجد حسب الفرض أن $\overline{F}=-\lambda\frac{1}{R^3}\frac{\overline{R}}{R}=-\lambda\frac{\overline{R}}{R^4}$ حيث أن $R=\left\Vert\overline{R}\right\Vert$.
3 درجات	كما نلاحظ أن $\vec{r}=\overline{OP}=\overline{OA}+\overline{AP}=\vec{r}_A+\overline{R} \Rightarrow d\vec{r}=d\vec{r}_A+d\overline{R}=\vec{0}+d\overline{R}=d\overline{R}$ و ذلك لأن $\vec{r}_A=\overline{Const}$.
5 درجات	و بما أن $\overline{R}^2=R^2$ فإنه و بمفاضلة الطرفين نجد أن $\overline{R}.d\overline{R}=R\ dR$ و يكون $dV=\lambda\frac{1}{R^4}R\ dR=\lambda\frac{dR}{R^3}=d\left(-\frac{\lambda}{2R^2}\right) \Rightarrow V=-\frac{\lambda}{2R^2}+D$ و هو تابع كمون الحقل حيث أن D هو ثابت يتم تعيينه من شروط كمون المسألة.

و لحساب العمل, نعلم أن $W_{B\to C}=V(B)-V(C)=\left(-\frac{\lambda}{2R_B^2}+D\right)-\left(-\frac{\lambda}{2R_C^2}+D\right)=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{R_C^2}-\frac{1}{R_B^2}\right)$ $=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\left\Vert\overline{AC}\right\Vert^2}-\frac{1}{\left\Vert\overline{AB}\right\Vert^2}\right)$ $=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{(3-0)^2+(2-0)^2+(1-(-1))^2}-\frac{1}{(1-0)^2+(2-0)^2+(1-(-1))^2}\right)$ $=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{9+4+4}-\frac{1}{1+4+4}\right)=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{9}\right)=-\frac{4}{153}\lambda$	5 درجات

السؤال الرابع: (30 درجة)

إن حركة الكتلة هي حركة مستقيمة تتم على المحور الشاقولي المار بنقطة تعليق النابض, لذلك نعتبر O (موضع توازن النابض قبل تعليق الكتلة) مركزاً للإحداثيات و محور الحركة المحور الشاقولي الهابط OX و نستخدم الإحداثي x للكتلة كوسيط للحركة.		3 درجات
لإيجاد مقدار استطالة النابض بعد تعليق الكتلة و استقرارها في الموضع O'. نطبق مبدأ التوازن على اعتبار أن الكتلة متوازنة في هذا الموضع. تؤثر على الكتلة في حال التوازن قوة ثقلها $\overline{F_1}=m\ g\ \overline{e_x}=2\ \overline{e_x}$ و قوة مرونة النابض $\overline{F_2}=-\mu\ x_{O'}\ \overline{e_x}=-400\ a_0\ \overline{e_x}$. و بتطبيق المبدأ العام في التوازن نجد أن $\overline{F_1}+\overline{F_2}=\vec{0}$ و بالإسقاط على المحور OX نجد أن $2-400\ a_0=0 \quad \Rightarrow \quad a_0=0.005$	في حال التوازن O $F=-\mu x$ O' $F=mg$ X	8 درجات
تؤثر على الكتلة في حال حركتها ضمن السائل كما هو موضح في الشكل المجاور, قوة ثقلها $\overline{F_1}=m\ g\ \overline{e_x}=2\ \overline{e_x}$ و قوة مرونة النابض $\overline{F_2}=-\mu\ x\ \vec{i}=-400\ x\ \vec{i}$ و قوة مقاومة الوسط (السائل) لحركة الكتلة $\overline{T}=-16\ \dot{x}\ \vec{i}$.		6 درجات

تطبيق المبدأ الأساسي في التحريك على حركة الكتلة نجد أن

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{T} = m\ \vec{\Gamma}$$

و بالإسقاط على محور الحركة OX, نجد أن

$$OX\ :\ 2 - 400\,x - 16\,\dot{x} = 0.2\,\ddot{x}$$

و التي يمكن كتابتها بالشكل

$$(*)\qquad \boxed{\ddot{x} + 80\,\dot{x} + 2000\,x = 10}$$

و هي معادلة حركة الكتلة, حيث نلاحظ أنها معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة.

في حال الحركة

6 درجات

لحل المعادلة (*) و استنتاج قانون الحركة نحل أولاً المعادلة المتجانسة الموافقة

$$(**)\qquad \ddot{x} + 80\,\dot{x} + 2000\,x = 0$$

حيث نكتب أولاً المعادلة المميزة و هي

$$\lambda^2 + 80\,\lambda + 2000 = 0$$

و بحل هذه المعادلة نجد الحلين المركبين $\lambda_{1,2} = -40 \mp 20\,i$. و تكون عبارة الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (**) بالشكل

$$x = \left[c_1\,Sin(20\,t) + c_2\,Cos(20\,t)\right]e^{-40\,t}$$

و بملاحظة أن $x = 0.005$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (*), يصبح الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (*) بالشكل

$$x = \left[c_1\,Sin(20\,t) + c_2\,Cos(20\,t)\right]e^{-40\,t} + 0.005$$

و لتعيين القانون الزمني لحركة الكتلة نعوض شروط البدء $x_0 = a_0 + a = 0.015$ و $\dot{x}_0 = 0$ نجد أن

$$\begin{cases} c_2 + 0.005 = 0.015 \\ 20\,c_1 - 40\,c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0.01 \\ c_1 = 2\,c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0.01 \\ c_1 = 0.02 \end{cases}$$

و يصبح القانون الزمني لحركة الكتلة بالشكل

$$(+)\qquad \boxed{x - 0.005 = \left[0.02\,Sin(20\,t) + 0.01\,Cos(20\,t)\right]e^{-40\,t}}$$

7 درجات

.....................انتهى السلم (اربع صفحات).....................

جامعة البعث / كلية العلوم　　　　　　　　　　　　　　　　الإسم و الرقم الجامعي:

امتحان مادة الميكانيك (1) لطلاب السنة الثانية / قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني للعام الدراسي 2014 – 2015

السؤال الأول: (20 درجة)

في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و مباشرة $OXYZ$, حدد مع الرسم الوسطاء الكروية والأسطوانية لتعيين نقطة M في الفراغ ثم اكتب عبارة متجه موضع النقطة في الجملتين و استنتج عبارتي سرعة النقطة في هاتين الجملتين.

السؤال الثاني: (25 درجة)

تتحرك نقطة P في المستوي XOY بحيث تعطى إحداثياتها القطبية بالقوانين الزمنية التالية

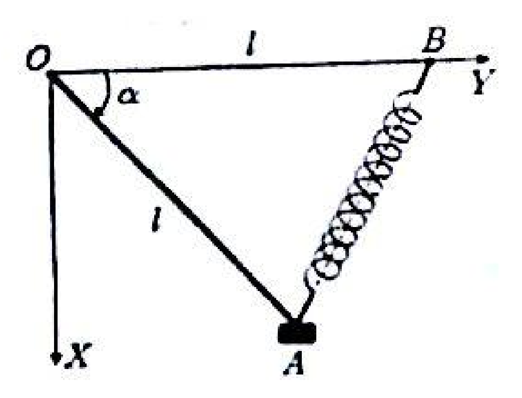
$$\rho = a\ Cos\varphi \quad ; \quad t = \frac{1}{4}\left(2\varphi + Sin(2\varphi)\right)$$

أثبت أن حركة النقطة خاضعة لقانون السطوح ثم عين متجهي سرعة و تسارع النقطة ؟

السؤال الثالث: (25 درجة)

حقل مركزي ثابت مركزه النقطة $A(0,1,0)$ و يتناسب عكساً مع مربع البعد عن هذا المركز بثابت تناسب λ, عين هذا الحقل ثم أثبت أنه حقل كموني و أوجد تابع كمونه و أحسب العمل الذي ينجزه متجه الحقل عندما تنتقل نقطة تحت تأثير هذا الحقل من الموضع $B(1,2,1)$ إلى الموضع $C(3,2,1)$ ؟

السؤال الرابع: (30 درجة)



في الشكل المبين جانباً جسيم A كتلته m معلق بطرف خيط OA غير قابل للامتطاط طوله l و طرفه الآخر مثبت في مبدأ الإحداثيات, و الجسيم مربوط أيضاً بطرف نابض AB طوله الطبيعي l و طرفه الآخر مثبت في النقطة B الواقعة على المحور OY و التي تبعد عن مبدأ الإحداثيات مسافة l.

1. عين عدد درجات الحرية و الوسطاء المستقلة لحركة الجسيم على اعتباره نقطة مادية.
2. عين على الشكل, بعد نقله إلى ورقة الإجابة, القوى المؤثرة على هذا الجسيم ثم عين شروط توازنه.
3. بفرض أن الجسيم متوازن في الموضع $\alpha = \pi/6$, عين معامل مرونة النابض و أوجد قوة شد الخيط في هذا الموضع.

مدرس المقرر: الدكتور محمد العلي　　　　　　　　　　　　　______ انتهت الأسئلة ______

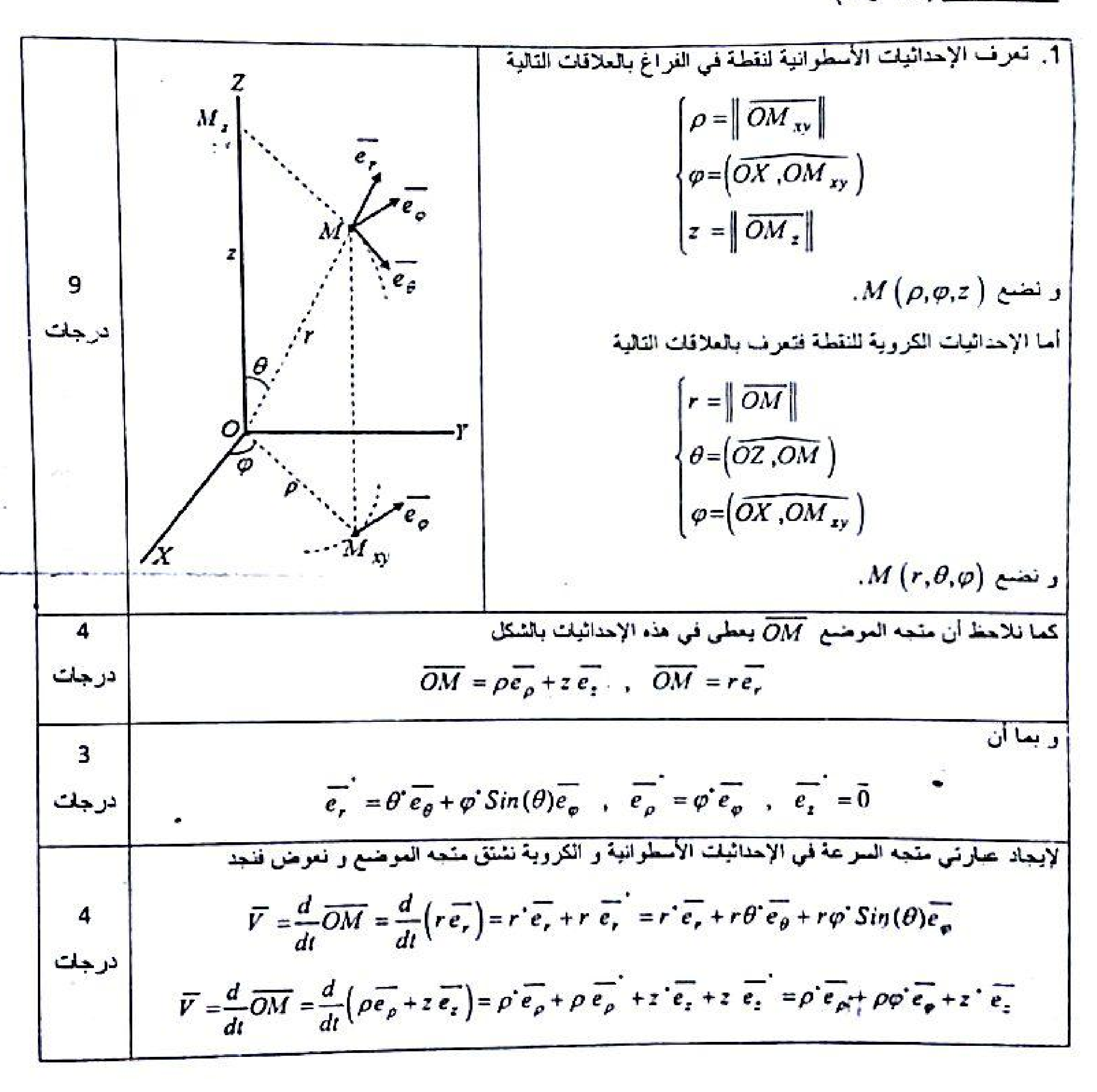
مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

جامعة البعث / كلية العلوم / قسم الرياضيات

سلم تصحيح مادة الميكانيك (1), لطلاب السنة الثانية / رياضيات

امتحان الفصل الثاني للعام الدراسي 2014 – 2015

السؤال الأول: (20 درجة)



الدرجة	الحل
9 درجات	1. تعرف الإحداثيات الأسطوانية لنقطة في الفراغ بالعلاقات التالية $\begin{cases} \rho = \Vert \overline{OM_{xy}} \Vert \\ \varphi = \left(\overline{OX}, \overline{OM_{xy}}\right) \\ z = \Vert \overline{OM_z} \Vert \end{cases}$ و نضع $M(\rho, \varphi, z)$. أما الإحداثيات الكروية للنقطة فتعرف بالعلاقات التالية $\begin{cases} r = \Vert \overline{OM} \Vert \\ \theta = \left(\overline{OZ}, \overline{OM}\right) \\ \varphi = \left(\overline{OX}, \overline{OM_{xy}}\right) \end{cases}$ و نضع $M(r, \theta, \varphi)$.
4 درجات	كما نلاحظ أن متجه الموضع $\overline{OM}$ يعطى في هذه الإحداثيات بالشكل $\overline{OM} = \rho \overline{e_\rho} + z\,\overline{e_z}\ ,\quad \overline{OM} = r\,\overline{e_r}$
3 درجات	و بما أن $\dot{\overline{e_r}} = \dot{\theta}\,\overline{e_\theta} + \dot{\varphi}\,Sin(\theta)\overline{e_\varphi}\ ,\quad \dot{\overline{e_\rho}} = \dot{\varphi}\,\overline{e_\varphi}\ ,\quad \dot{\overline{e_z}} = \overline{0}$
4 درجات	لإيجاد عبارتي متجه السرعة في الإحداثيات الأسطوانية و الكروية نشتق متجه الموضع و نعوض فنجد $\overline{V} = \frac{d}{dt}\overline{OM} = \frac{d}{dt}\left(r\overline{e_r}\right) = \dot{r}\,\overline{e_r} + r\,\dot{\overline{e_r}} = \dot{r}\,\overline{e_r} + r\dot{\theta}\,\overline{e_\theta} + r\dot{\varphi}\,Sin(\theta)\overline{e_\varphi}$ $\overline{V} = \frac{d}{dt}\overline{OM} = \frac{d}{dt}\left(\rho\overline{e_\rho} + z\,\overline{e_z}\right) = \dot{\rho}\,\overline{e_\rho} + \rho\,\dot{\overline{e_\rho}} + \dot{z}\,\overline{e_z} + z\,\dot{\overline{e_z}} = \dot{\rho}\,\overline{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\overline{e_\varphi} + \dot{z}\,\overline{e_z}$

السؤال الثاني: (25 درجة)

الحل: نلاحظ أن $dt = \frac{1}{4}\left(2+2Cos(2\varphi)\right)d\varphi = \frac{\left(1+Cos(2\varphi)\right)}{2}d\varphi = Cos^2(\varphi)d\varphi \Rightarrow \varphi^{\cdot} = \frac{1}{Cos^2(\varphi)} \Rightarrow$ $\rho^2\varphi^{\cdot} = \left(\alpha\ Cos(\varphi)\right)^2\frac{1}{Cos^2(\varphi)} = \alpha^2 = C$ و بالتالي فإن حركة النقطة المعطاة خاضعة لقانون السطوح.	10 درجات
و لإيجاد متجها سرعة و تسارع الحركة نستخدم دستورا بينيه الأول و الثاني, حيث نجد أن $u = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\alpha\ Cos(\varphi)} \Rightarrow u'_{\varphi} = \frac{Sin(\varphi)}{\alpha\ Cos^2(\varphi)}\ \&\ u''_{\varphi} = \frac{1}{\alpha\ Cos(\varphi)} + \frac{2Sin^2(\varphi)}{\alpha\ Cos^3(\varphi)}$	6 درجات
و باستخدام دستورا بينيه نجد أن $\overline{V} = C\left(-\frac{du}{d\varphi}\overline{e_\rho} + u\,\overline{e_\varphi}\right) = \alpha^2\left[-\frac{Sin(\varphi)}{\alpha\ Cos^2(\varphi)}\overline{e_\rho} + \frac{1}{\alpha\ Cos(\varphi)}\overline{e_\varphi}\right] \Rightarrow$ $\overline{V} = \frac{\alpha}{Cos(\varphi)}\left[-Tan(\varphi)\overline{e_\rho} + \overline{e_\varphi}\right]$ $\overline{\Gamma} = -C^2u^2\left(u''_{\varphi} + u\right)\overline{e_\rho} = -\frac{2\alpha}{Cos^5(\varphi)}\overline{e_\rho}$	9 درجات

السؤال الثالث: (25 درجة)

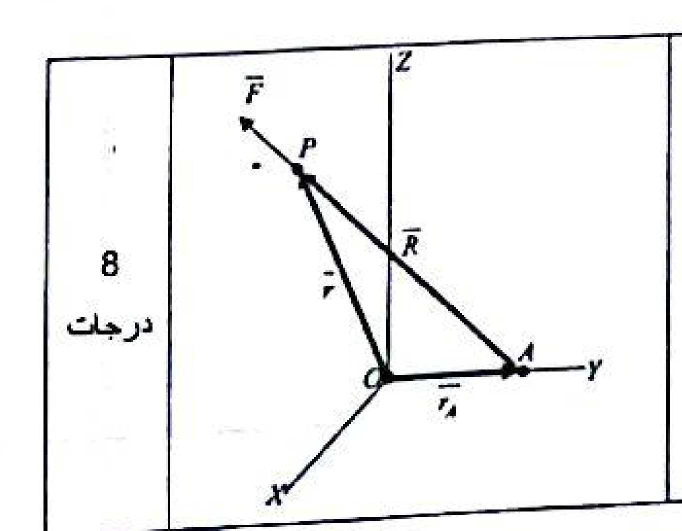
بملاحظة الشكل المجاور, لنضع

$$\overline{r} = \overline{OP}\ ,\ \overline{R} = \overline{AP}\ ,\ \overline{r_A} = \overline{OA}$$

عندئذٍ نجد حسب الفرض أن

$$\overline{F} = \lambda\frac{1}{R^2}\frac{\overline{R}}{R} = \lambda\frac{\overline{R}}{R^3}$$

حيث أن $R = \left\|\overline{R}\right\|$.



<table>
<tr>
<td>

و نلاحظ أن

$$\bar{r}=\overline{OP}=\overline{OA}+\overline{AP}=\bar{r}_A+\bar{R} \quad \Rightarrow$$

$$d\bar{r}=d\bar{r}_A+d\bar{R}=\bar{0}+d\bar{R}=d\bar{R}$$

و ذلك لأن $\bar{r}_A=\overline{Const}$.

</td>
<td>5
درجات</td>
</tr>
<tr>
<td>

و لكن

$$dV=-\bar{F}\cdot d\bar{r}=-\lambda\frac{1}{R^3}\bar{R}\cdot d\bar{R}$$

و بما أن $\bar{R}^2=R^2$ فإنه و بمفاضلة الطرفين نجد أن $\bar{R}\cdot d\bar{R}=R\,dR$، و يكون

$$dV=-\lambda\frac{1}{R^3}R\,dR=-\lambda\frac{dR}{R^2}=d\left(\frac{\lambda}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{V=\frac{\lambda}{R}+D}$$

و هو تابع كمون الحقل حيث أن D هو ثابت يتم تعيينه من شروط كمون المسألة، أي أن الحقل المعرف هو حقل كموني.

</td>
<td>7
درجات</td>
</tr>
<tr>
<td>

و لحساب العمل، نعلم أن

$$W_{B\to C}=V(B)-V(C)=\left(\frac{\lambda}{R_B}+D\right)-\left(\frac{\lambda}{R_C}+D\right)=\frac{\lambda}{R_B}-\frac{\lambda}{R_C}$$

$$=\lambda\left(\frac{1}{R_B}-\frac{1}{R_C}\right)=\lambda\left(\frac{1}{\|\overline{AB}\|}-\frac{1}{\|\overline{AC}\|}\right)$$

$$=\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2+(1-0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(3-0)^2+(2-1)^2+(1-0)^2}}\right)$$

$$=\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{33}}\lambda$$

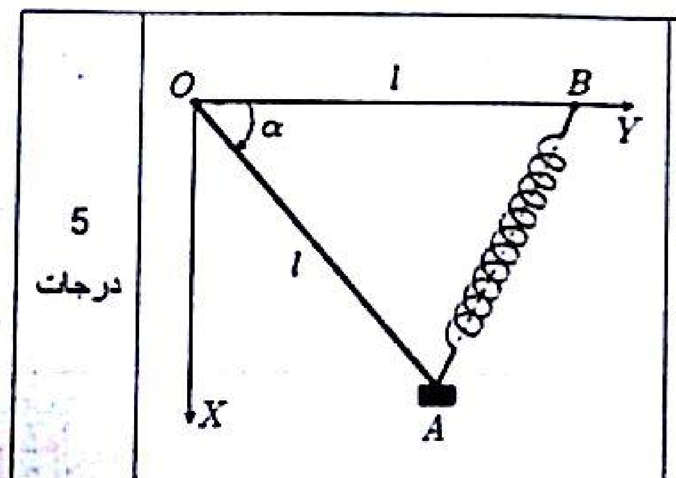
</td>
<td>5
درجات</td>
</tr>
</table>

السؤال الرابع: (30 درجة)

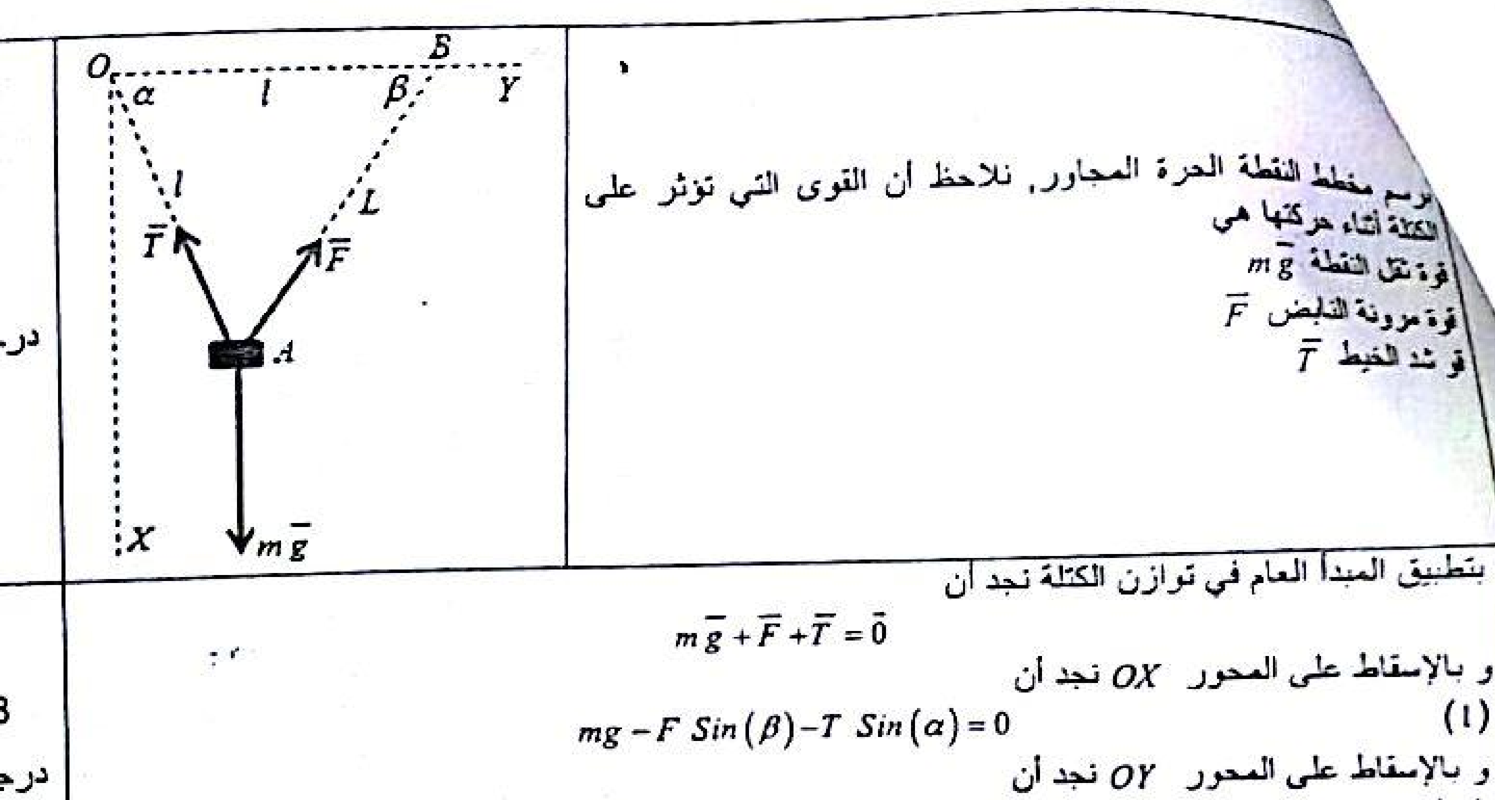
<table>
<tr>
<td>

بملاحظة أن النقطة تتحرك على قوس دائرة نصف قطرها l و مركزها في مبدأ الإحداثيات، نستنتج أن النقطة تملك درجة حرية واحدة فقط و يكفي لتعيينها وسيط مستقل واحد فقط هو الزاوية α التي يصنعها نصف القطر الشعاعي $\bar{r}=\overline{OA}$ للنقطة مع المحور OY الموضحة في الشكل المجاور.

</td>
<td>



</td>
<td>5
درجات</td>
</tr>
</table>



نرسم مخطط النقطة الحرة المجاور. نلاحظ أن القوى التي تؤثر على الكتلة أثناء حركتها هي
قوة ثقل النقطة $m\vec{g}$
قوة مرونة النابض $\vec{F}$
قوة شد الخيط $\vec{T}$

درج

بتطبيق المبدأ العام في توازن الكتلة نجد أن

$$m\vec{g}+\vec{F}+\vec{T}=\vec{0}$$

و بالإسقاط على المحور OX نجد أن

$$mg-F\ Sin(\beta)-T\ Sin(\alpha)=0 \qquad (1)$$

و بالإسقاط على المحور OY نجد أن

$$0+F\ Cos(\beta)-T\ Cos(\alpha)=0 \qquad (2)$$

تمثل المعادلتين (1) و (2) شروط توازن الكتلة المعطاة.

3 درج

و بملاحظة أن $F=\mu(L-l)$ و أن $L=2l\ Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ و $\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$، يصبح

$$F=\mu l\left(2\ Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\right)$$

و يصبح شرطا التوازن بعد الإصلاح الشكل

$$\begin{cases} mg-\mu l\ Sin(\alpha)+\mu l\ Cos(\alpha/2)-T\ Sin(\alpha)=0 \\ \mu l\left[1-Cos(\alpha)\right]-\mu l\ Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-T\ Cos(\alpha)=0 \end{cases}$$

6 درج

بتعويض قيمة α المعطاة و حل جملة المعادلتين الناتجتين بالنسبة للمجهولين μ و T نحصل على قيمة ثابت مرونة النابض و قيمة شد الخيط في موضع التوازن.

5 درجا

..................انتهى السلم (اربع صفحات)..................

مدرس المقرر: الدكتور محمد العلي

الإسم و الرقم الجامعي:

امتحان مادة الميكانيك (١) لطلاب السنة الثانية / رياضيات

الفصل الدراسي الثاني للعام الدراسي ٢٠١٢ ــ ٢٠١٣

السؤال الأول: (٣٠ درجة)

في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و نظامية، عين مع الرسم الإحداثيات الأسطوانية لحركة نقطة ثم استنتج عبارة متجه سرعة هذه النقطة في الإحداثيات الأسطوانية ؟

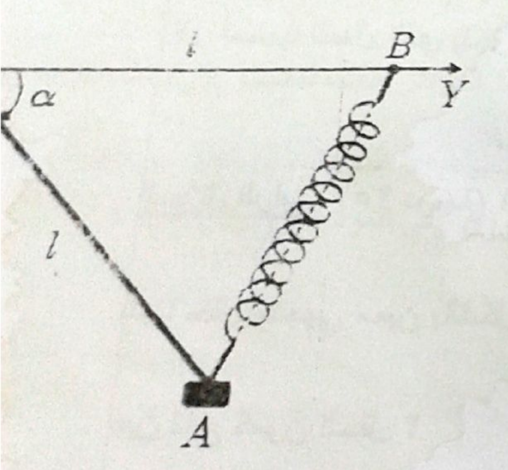
السؤال الثاني: (٣٠ درجة)

حقل قوى مستوي هو محصلة لحقلين مركزيين أحدهما جاذب مركزه النقطة $(0,1)$ و الآخر نابذ مركزه النقطة $(0,-1)$ و يتناسبان عكـ[...] مع مربع بعد النقطة $M(x,y)$ من المستوي عن مركزي الحقلين بثابتي تناسب k_1 و k_2 على الترتيب

١. استنتج متجه الحقل و دالة كمونه (إن وجدت)

٢. عين خط الحقل و خط السوية المارين من النقطة $(0,0)$

السؤال الثالث: (٤٠ درجة):



في الشكل المبين جانباً جسيم A كتلته m معلق بطرف خيط OA غير قابل للامتطاط طوله l و طرفه الآخر مثبت في مبدأ الإحداثيات، و الجسيم مربوط أيضاً بطرف نابض AB طوله الطبيعي l و طرفه الأخر مثبت في النقطة B الواقعة على المحور OY و التي تبعد عن مبدأ الإحداثيات مسافة l. و المطلوب

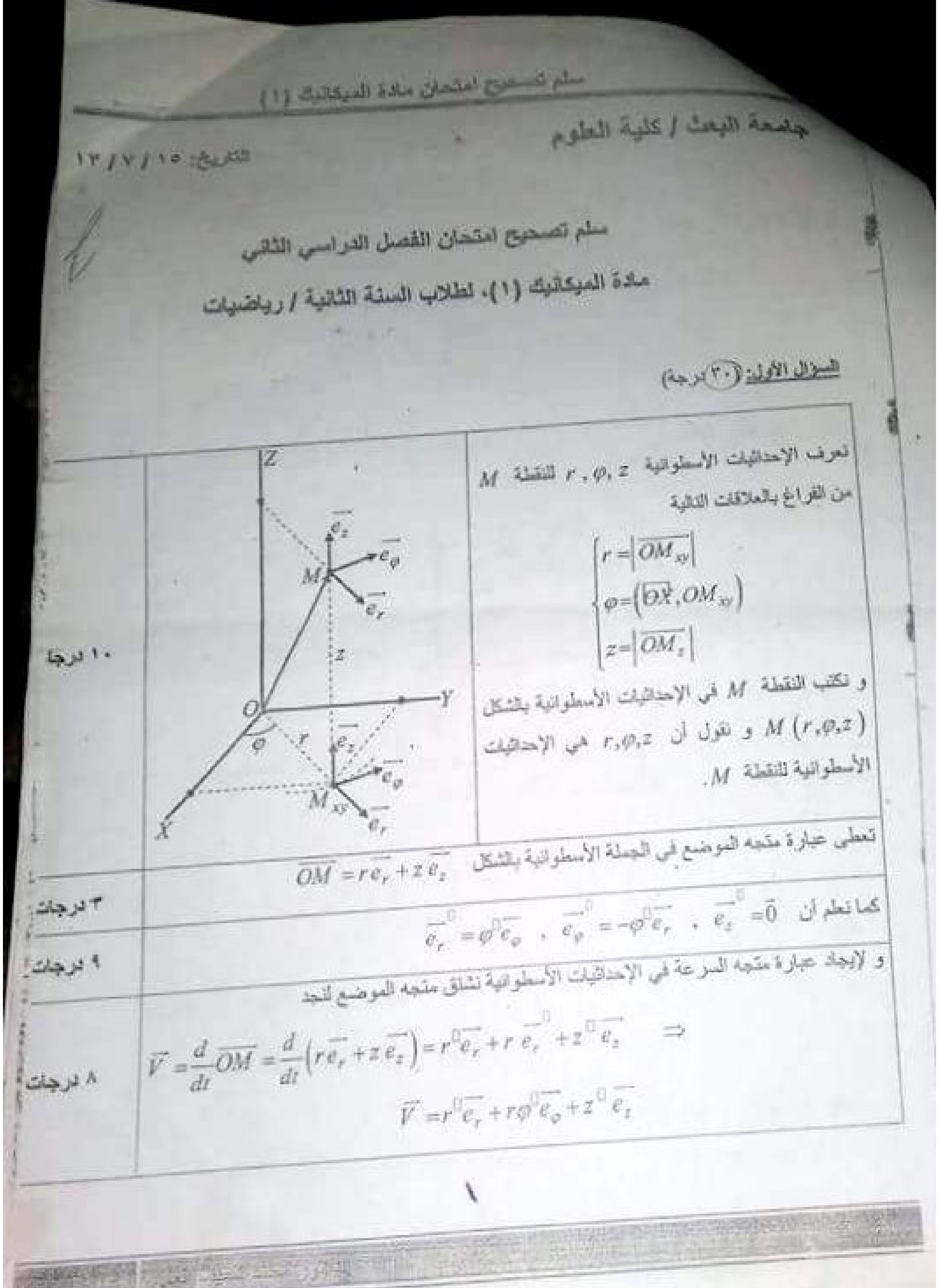
١. عين عدد درجات الحرية و الوسطاء المستقلة لحركة الجسيم على اعتباره نقطة مادية.

٢. عين على الشكل، بعد نقله إلى ورقة الإجابة، القوى المؤثرة على الجسيم ثم أوجد شروط توازن الجسيم.

٣. بفرض أن الجسيم متوازن في الموضع ، أوجد معامل مرونة النابض و قوة شد الخيط في هذا الموضع.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و

مدرس المقرر: الدكتور محمد



جامعة البعث / كلية العلوم

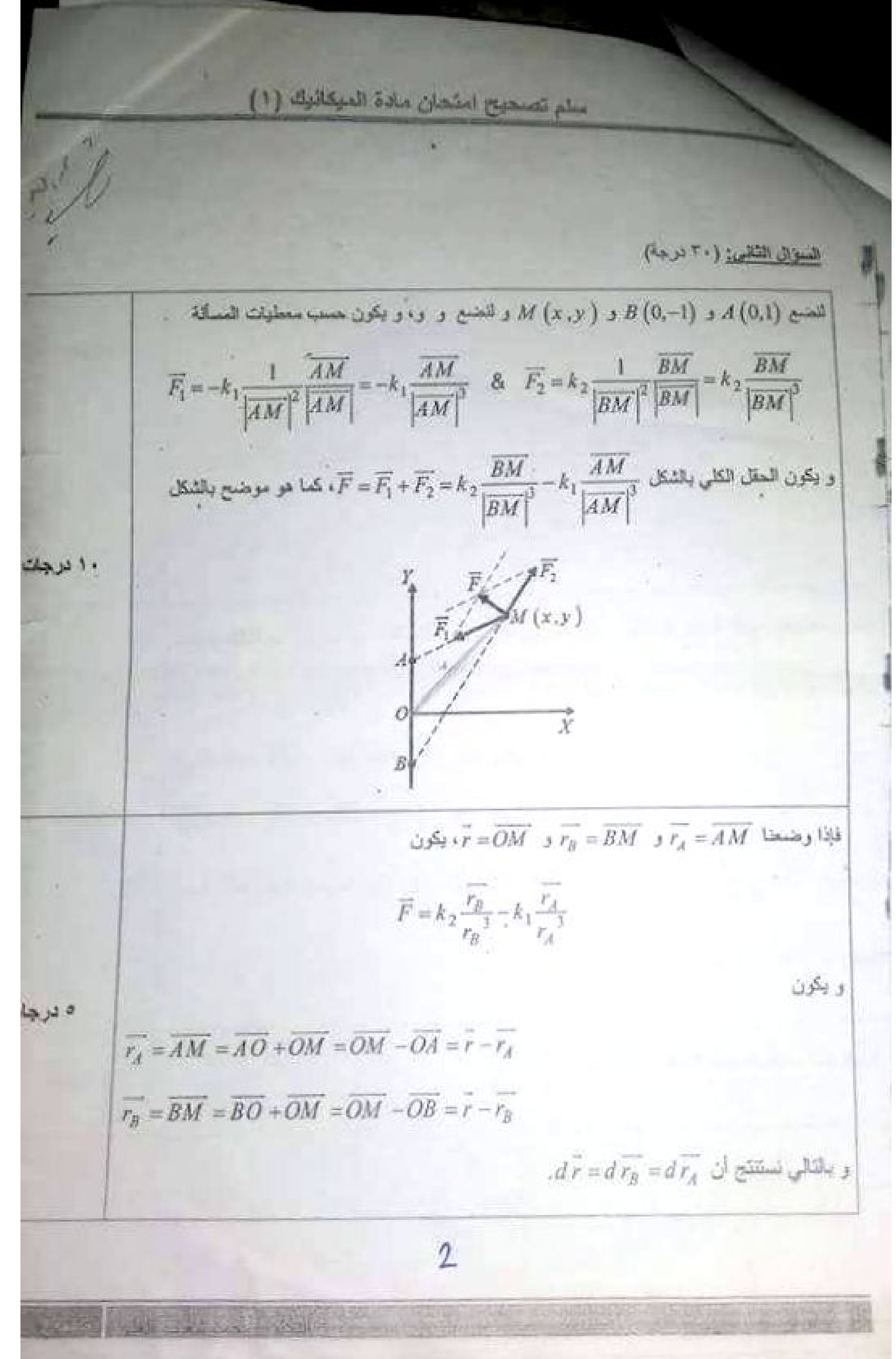
التاريخ: ١٥ / ٧ / ١٣

سلم تصحيح امتحان الفصل الدراسي الثاني

مادة الميكانيك (١)، لطلاب السنة الثانية / رياضيات

السؤال الأول: (٣٠ درجة)

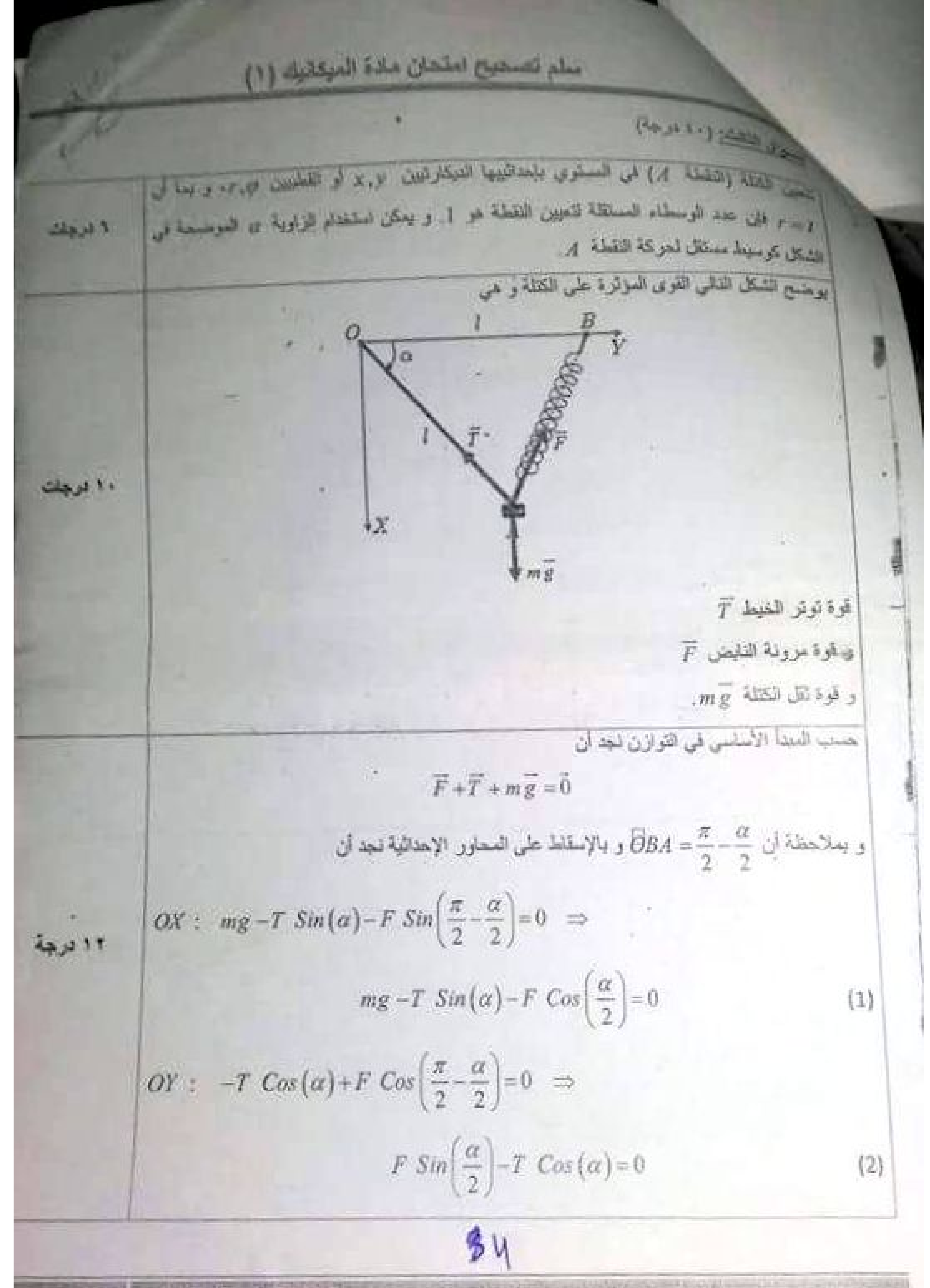
نعرف الإحداثيات الأسطوانية r, φ, z للنقطة M من الفراغ بالعلاقات التالية $\begin{cases} r=\lvert\overline{OM_{xy}}\rvert \\ \varphi=(\overline{Ox},\overline{OM_{xy}}) \\ z=\lvert\overline{OM_z}\rvert \end{cases}$ و نكتب النقطة M في الإحداثيات الأسطوانية بالشكل $M(r,\varphi,z)$ و نقول أن r,φ,z هي الإحداثيات الأسطوانية للنقطة M.	١٠ درجات
تعطى عبارة متجه الموضع في الجملة الأسطوانية بالشكل $\overline{OM}=r\overline{e_r}+z\overline{e_z}$	٣ درجات
كما نعلم أن $\dot{\overline{e_z}}=\vec{0}$ ، $\dot{\overline{e_\varphi}}=-\dot{\varphi}\overline{e_r}$ ، $\dot{\overline{e_r}}=\dot{\varphi}\overline{e_\varphi}$	٩ درجات
و لإيجاد عبارة متجه السرعة في الإحداثيات الأسطوانية نشتق متجه الموضع لنجد $\vec{V}=\frac{d}{dt}\overline{OM}=\frac{d}{dt}(r\overline{e_r}+z\overline{e_z})=\dot{r}\overline{e_r}+r\dot{\overline{e_r}}+\dot{z}\overline{e_z}\Rightarrow$ $\vec{V}=\dot{r}\overline{e_r}+r\dot{\varphi}\overline{e_\varphi}+\dot{z}\overline{e_z}$	٨ درجات



السؤال الثاني: (٣٠ درجة)

١٠ درجات	لنضع $A(0,1)$ و $B(0,-1)$ و $M(x,y)$ و لنضع و و، و يكون حسب معطيات المسألة $\overrightarrow{F_1}=-k_1\frac{1}{\lvert\overrightarrow{AM}\rvert^2}\frac{\overrightarrow{AM}}{\lvert\overrightarrow{AM}\rvert}=-k_1\frac{\overrightarrow{AM}}{\lvert\overrightarrow{AM}\rvert^3}$ & $\overrightarrow{F_2}=k_2\frac{1}{\lvert\overrightarrow{BM}\rvert^2}\frac{\overrightarrow{BM}}{\lvert\overrightarrow{BM}\rvert}=k_2\frac{\overrightarrow{BM}}{\lvert\overrightarrow{BM}\rvert^3}$ و يكون الحقل الكلي بالشكل $\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=k_2\frac{\overrightarrow{BM}}{\lvert\overrightarrow{BM}\rvert^3}-k_1\frac{\overrightarrow{AM}}{\lvert\overrightarrow{AM}\rvert^3}$، كما هو موضح بالشكل (الشكل: Y، X، O، A، B، $\overrightarrow{F}$، $\overrightarrow{F_1}$، $\overrightarrow{F_2}$، M (x,y))
٥ درجات	فإذا وضعنا $\overrightarrow{r_A}=\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{r_B}=\overrightarrow{BM}$ و $\vec r=\overrightarrow{OM}$، يكون $\overrightarrow{F}=k_2\frac{\overrightarrow{r_B}}{r_B^3}-k_1\frac{\overrightarrow{r_A}}{r_A^3}$ و يكون $\overrightarrow{r_A}=\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\vec r-\overrightarrow{r_A}$ $\overrightarrow{r_B}=\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}=\vec r-\overrightarrow{r_B}$ و بالتالي نستنتج أن $d\vec r=d\overrightarrow{r_B}=d\overrightarrow{r_A}$.

	و لإيجاد تابع الكمون نضع $$dV=-\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\left(k_2\frac{\vec{r_B}}{r_B^3}-k_1\frac{\vec{r_A}}{r_A^3}\right)\cdot d\vec{r}=k_1\frac{\vec{r_A}\cdot d\vec{r}}{r_A^3}-k_2\frac{\vec{r_B}\cdot d\vec{r}}{r_B^3}$$ $$=k_1\frac{\vec{r_A}\cdot d\vec{r_A}}{r_A^3}-k_2\frac{\vec{r_B}\cdot d\vec{r_B}}{r_B^3}$$ و بما أن $\vec{r_A}\cdot d\vec{r_A}=r_A\,dr_A$ و $\vec{r_B}\cdot d\vec{r_B}=r_B\,dr_B$، نجد أن $$dV=k_1\frac{dr_A}{r_A^2}-k_2\frac{dr_B}{r_B^2}=d\left(k_2\frac{1}{r_B}-k_1\frac{1}{r_A}\right)=d\left(\frac{k_2}{r_B}-\frac{k_1}{r_A}\right)\Rightarrow$$ $$V=\frac{k_2}{r_B}-\frac{k_1}{r_A}$$
٥ درجات	
٧ درجات	تتعين خطوط سوية الحقل بالعلاقة $V=C$، أي أن $\frac{k_2}{r_B}-\frac{k_1}{r_A}=C$. و نعوض إحداثيات النقطة لإيجاد خط السوية المار من النقطة $(0,0)$ لنجد أن $$\vec{r_A}(0,0)=\overline{AO}=-\overline{OA}=(0,-1)\Rightarrow r_A(0,0)=1$$ $$\vec{r_B}(0,0)=\overline{BO}=-\overline{OB}=(0,1)\Rightarrow r_B(0,0)=1$$ و يكون $\frac{k_2}{r_B(0,0)}-\frac{k_1}{r_A(0,0)}=C$ و بالتالي فإن $C=k_2-k_1$. نعوض فنجد خط السوية المطلوب و هو $\frac{k_2}{r_B}-\frac{k_1}{r_A}=k_2-k_1$.
٣ درجات	لإيجاد خط الحقل نستخدم المعادلة التفاضلية $\frac{dx}{F_x}=\frac{dy}{F_y}$.



سلم تصحيح امتحان مادة الميكانيك (١)

السؤال الأول: (٤٠ درجة)

يتعين الكتلة (النقطة A) في المستوي بإحداثيتيها الديكارتيتين x,y أو القطبيتين r,φ و بما أن $r=l$ فإن عدد الوسطاء المستقلة لتعيين النقطة هو 1 و يمكن استخدام الزاوية α الموضحة في الشكل كوسيط مستقل لحركة النقطة A

٦ درجات

يوضح الشكل التالي القوى المؤثرة على الكتلة و هي

قوة توتر الخيط $\vec{T}$

و قوة مرونة النابض $\vec{F}$

و قوة ثقل الكتلة $m\vec{g}$.

١٠ درجات

حسب المبدأ الأساسي في التوازن نجد أن

$$\vec{F}+\vec{T}+m\vec{g}=\vec{0}$$

و بملاحظة أن $\widehat{OBA}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$ و بالإسقاط على المحاور الإحداثية نجد أن

$$OX:\quad mg-T\,Sin(\alpha)-F\,Sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=0\quad\Rightarrow$$

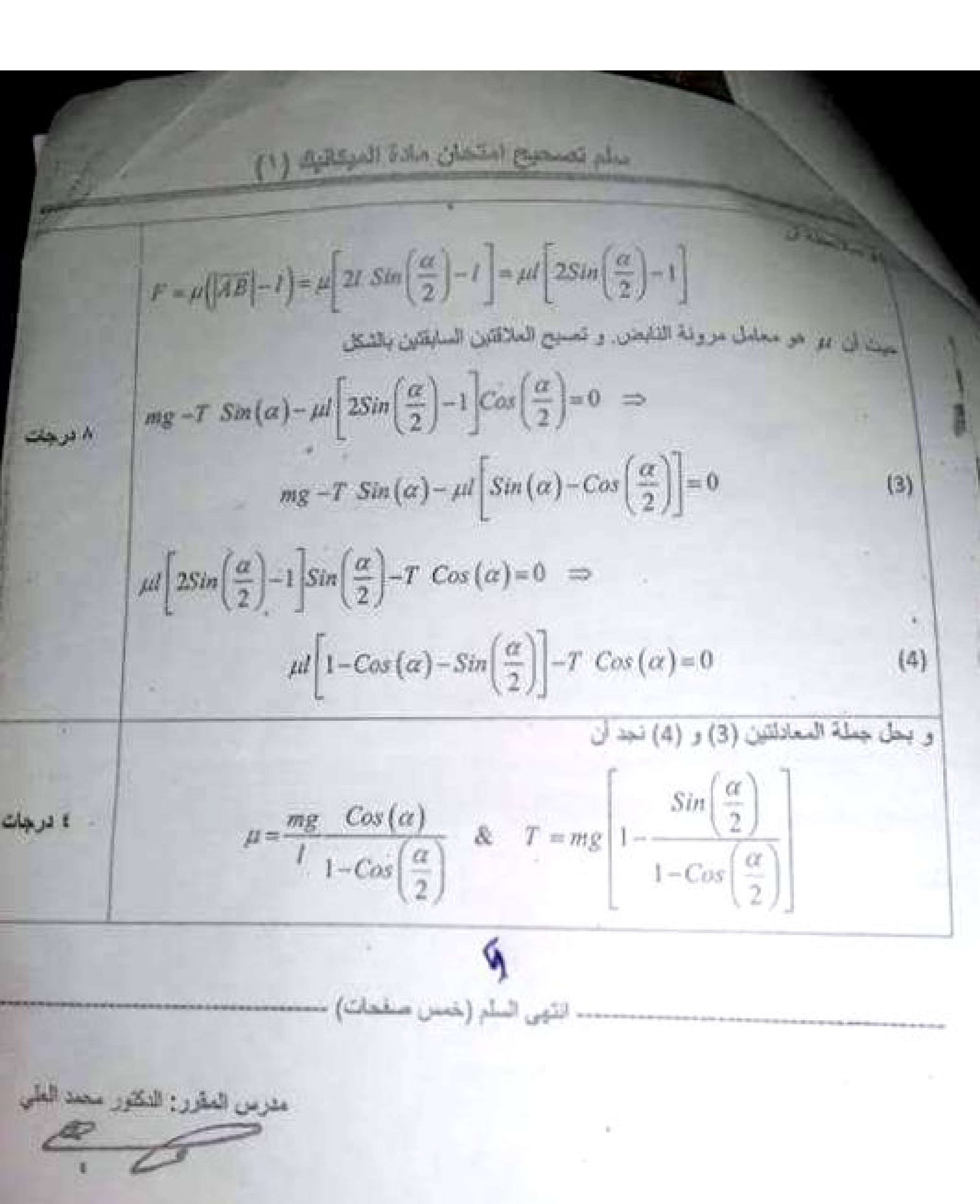
$$mg-T\,Sin(\alpha)-F\,Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0\qquad(1)$$

$$OY:\quad -T\,Cos(\alpha)+F\,Cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=0\quad\Rightarrow$$

$$F\,Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-T\,Cos(\alpha)=0\qquad(2)$$

١٢ درجة

34



أن

$$F=\mu\left(\left|\overline{AB}\right|-l\right)=\mu\left[2l\,Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-l\right]=\mu l\left[2Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\right]$$

حيث أن μ هو معامل مرونة النابض. و تصبح العلاقتين السابقتين بالشكل

٨ درجات

$$mg-T\;Sin(\alpha)-\mu l\left[2Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\right]Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0\;\Rightarrow$$

$$mg-T\;Sin(\alpha)-\mu l\left[Sin(\alpha)-Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]=0 \qquad (3)$$

$$\mu l\left[2Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\right]Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-T\;Cos(\alpha)=0\;\Rightarrow$$

$$\mu l\left[1-Cos(\alpha)-Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]-T\;Cos(\alpha)=0 \qquad (4)$$

و بحل جملة المعادلتين (3) و (4) نجد أن

٤ درجات

$$\mu=\frac{mg}{l}\frac{Cos(\alpha)}{1-Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\quad\&\quad T=mg\left[1-\frac{Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-Cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

9

انتهى السلم (خمس صفحات)

مدرس المقرر: الدكتور محمد العلي

امتحان مادة الميكانيك (١) لطلاب السنة الثانية / رياضيات

الفصل الدراسي الأول للعام الدراسي ٢٠١٣ ــ ٢٠١٤

السؤال الأول: (٢٥ درجة)

ارسم جملة إحداثية ديكارتية و عين على الرسم الوسطاء الأسطوانية و الكروية لتعيين نقطة مادية P في الفضاء و متجهات الواحدة للجملتين الأسطوانية و الكروية، ثم اكتب عبارتي متجه موضع النقطة P في هاتين الجملتين ؟

السؤال الثاني: (٢٥ درجة) المحاضرة 2/

تتحرك نقطة مادية P في المستوي XOY بحيث تعطى إحداثيات هذه النقطة في كل لحظة زمنية t بالعلاقات

$$x=\theta Cos(\theta)\ ,\ y=\theta Sin(\theta)\quad ;\quad kt=\theta^3$$

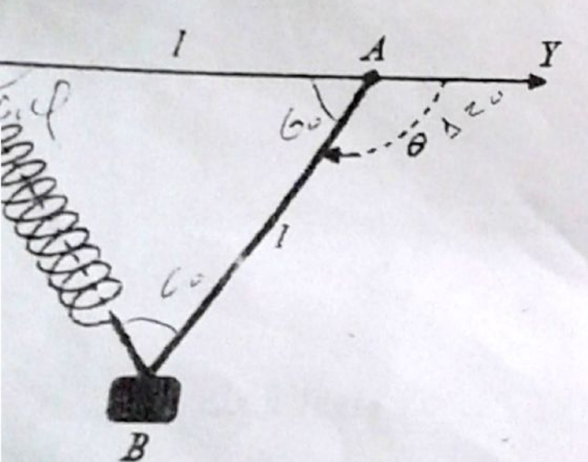
أ. اثبت أن حركة النقطة تخضع لقانون السطوح

ii. عين سرعة و تسارع حركة النقطة

السؤال الثالث: (٢٥ درجة) المحاضرة الثالثة

حقل مركزي نابذ مركزه النقطة $A(0,1,0)$ و يتناسب عكساً مع مربع البعد عن هذا المركز بثابت تناسب λ، عين العبارة الرياض... لمتجه الحقل ثم أثبت أنه حقلٌ كموني و أوجد تابع كمونه و أحسب العمل الذي ينجزه متجه الحقل عندما تنتقل نقطة تحت تأثير هذا ال... من الموضع $B(1,2,1)$ إلى الموضع $C(3,2,1)$ ؟

السؤال الرابع: (٢٥ درجة)



في الشكل المبين جانباً جسيم B كتلته m معلق بطرف خيط AB غير قابل للامتطاط طوله l طرفه الآخر مثبت في النقطة $A(0,l)$، و الجسيم مربوط أيضاً بطرف نابض OB طوله الطبيعي l و طرفه الآخر مثبت في مبدأ الإحداثيات كما هو مبين في الشكل المجاور

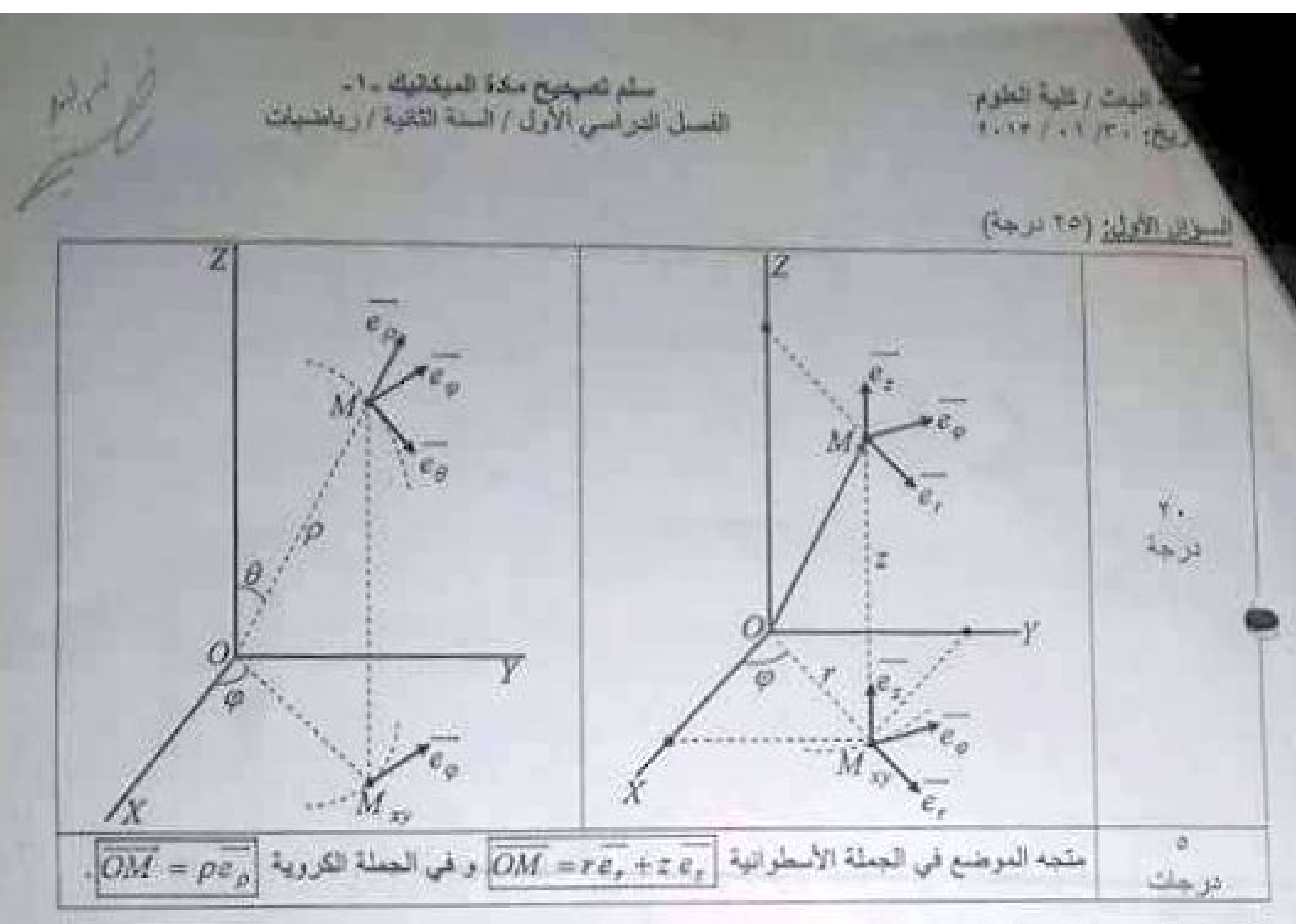
١. عين عدد درجات الحرية و الوسطاء المستقلة لحركة الجسيم على اعتباره نقطة مادية.

٢. عين على الشكل، بعد نقله إلى ورقة الإجابة، القوى المؤثرة على الجسيم ثم أوجد شروط توازن الجسيم.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و ال...

مدرس المقرر: الدكتور محمد ...

السؤال الأول: (٢٥ درجة)



٢٠ درجة	(الشكلان)
٥ درجات	متجه الموضع في الجملة الأسطوانية $\overline{OM} = r\,\overline{e_r} + z\,\overline{e_z}$ و في الجملة الكروية $\overline{OM} = \rho\,\overline{e_\rho}$.

السؤال الثاني: (٢٥ درجة)

١٠ درجات	نلاحظ أن $dt = \frac{1}{4}\left(2 + 2Cos(2\varphi)\right)d\varphi = \frac{\left(1 + Cos(2\varphi)\right)}{2}d\varphi = Cos^2(\varphi)d\varphi \;\Rightarrow$ $\varphi^{\bullet} = \frac{1}{Cos^2(\varphi)} \;\Rightarrow\; r^2\varphi^{\bullet} = \left(\alpha\, Cos(\varphi)\right)^2 \frac{1}{Cos^2(\varphi)} = \alpha^2 = C$ و بالتالي فإن حركة النقطة المعطاة خاضعة لقانون السطوح.
٥ درجات	لإيجاد سرعة و تسارع الحركة نستخدم دستورا بينيه الأول و الثاني، حيث نجد أن $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha\, Cos(\varphi)} \;\Rightarrow\; u'_\varphi = \frac{Sin(\varphi)}{\alpha\, Cos^2(\varphi)} \;\;\&\;\; u''_\varphi = \frac{1}{\alpha\, Cos(\varphi)} + \frac{2Sin^2(\varphi)}{\alpha\, Cos^3(\varphi)}$

باستخدام دستور ا بينيه نجد أن

$$\vec{V}=C\left(-\frac{du}{d\varphi}\vec{e_r}+u\vec{e_\varphi}\right)=\alpha^2\left[-\frac{Sin(\varphi)}{\alpha\, Cos^2(\varphi)}\vec{e_r}+\frac{1}{\alpha\, Cos(\varphi)}\vec{e_\varphi}\right] \Rightarrow$$

$$\vec{V}=\frac{a}{Cos(\varphi)}\left[-Tan(\varphi)\vec{e_r}+\vec{e_\varphi}\right]$$

$$\vec{\Gamma}=-C^2u^2\left(u''_\varphi+u\right)\vec{e_r}=-\frac{2a}{Cos^5(\varphi)}\vec{e_r}$$

١٠ درجات

السؤال الثالث: (٢٥ درجة)

باستخدام معادلات المنحني نجد أن

$$dx=3dt\ ,\ dy=4dt\ ,\ dz=dt$$

و تصبح عبارة العمل المطلوب بالشكل

$$W=\int_{t=0}^{t=2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_{t=0}^{t=2}\left(\frac{25}{6}y\ \vec{i}+(z-x)\vec{j}+\left(2z^2-x\right)\vec{k}\right)\cdot\left(dx\ \vec{i}+dy\ \vec{j}+dz\ \vec{k}\right)$$

$$=\int_{t=0}^{t=2}\left(\frac{25}{6}y\ dx+(z-x)dy+\left(2z^2-x\right)dz\right)$$

$$=\int_{t=0}^{t=2}\left(25t^2\ dt-8t\,(1+t)dt+\left(2t^2-11t+8\right)dt\right)$$

$$=\int_{t=0}^{t=2}\left(19t^2-19t+8\right)dt=\left[\frac{19}{3}t^3-\frac{19}{2}t^2+8t\right]_0^2=\frac{86}{3}$$

٢٥ درجة

السؤال الرابع: (٢٥ درجة)

في حال وجود تابع القوى (أو تابع الكمون) للحقل فإن

$$dU=\vec{F}\cdot d\vec{r}=\left(\lambda\,\vec{r}+\vec{a}\right)\cdot d\vec{r}=d\left(\frac{\lambda}{2}\vec{r}^{\,2}+\vec{a}\cdot\vec{r}\right)=d\left(\frac{\lambda}{2}r^2+\vec{a}\cdot\vec{r}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{U=\frac{\lambda}{2}r^2+\vec{a}\cdot\vec{r}+C}$$

١٠ درجات

حيث أن C هو ثابت يتم تعيينه من شروط كمون الحقل، وبالتالي فإن القوة المعطاة هي قوة كمونية.	
بما أن $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ و بفرض أن $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$ فإن $\vec{F} = (\lambda x + a_x)\vec{i} + (\lambda y + a_y)\vec{j} + (\lambda z + a_z)\vec{k}$	٥ درجات
وبالتالي فإن خطوط القوى تعطى بالمعادلات التفاضلية $\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \Rightarrow \frac{dx}{\lambda x + a_x} = \frac{dy}{\lambda y + a_y} = \frac{dz}{\lambda z + a_z} \Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{dx}{\lambda x + a_x} = \frac{dy}{\lambda y + a_y} \\ \frac{dy}{\lambda y + a_y} = \frac{dz}{\lambda z + a_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\lambda dy}{\lambda y + a_y} - \frac{\lambda dx}{\lambda x + a_x} = 0 \\ \frac{\lambda dz}{\lambda z + a_z} - \frac{\lambda dy}{\lambda y + a_y} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} Ln\left(\frac{\lambda y + a_y}{\lambda x + a_x}\right) = Ln(A) \\ Ln\left(\frac{\lambda z + a_z}{\lambda y + a_y}\right) = Ln(B) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \lambda y + a_y = A(\lambda x + a_x) \\ \lambda z + a_z = B(\lambda y + a_y) \end{matrix}}$ و هي معادلات خطوط قوى الحقل المعطى حيث أن A و B هما ثابتان اختياريات.	١٠ درجات

الدكتور محمد العلي

3

الإسم:

امتحان الدورة الاستثنائية للعام الدراسي 2013 – 2014

مادة الميكانيك (1), لطلاب السنة الثانية / رياضيات

السؤال الأول: (25 درجة)

في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و مباشرة $OXYZ$, حدد مع الرسم الوسطاء الكروية لتعيين نقطة M في الفراغ ثم اكتب عبارة متجه موضع النقطة في هذه الجملة و استنتج عبارة سرعة النقطة فيها.

السؤال الثاني: (25 درجة) المحاضرة الثانية

تتحرك نقطة مادية P وفق القوانين الزمنية التالية

$$x = h(1+Cos(t)) \quad , \quad y = h(1-Cos(t)) \quad , \quad z = \sqrt{2}\ h\ Sin(t)$$

أثبت أن حركة النقطة تخضع لقانون السطوح ثم أحسب السرعة السطحية لهذه الحركة.

السؤال الثالث: (25 درجة)

حقل مركزي جاذب مركزه النقطة $A(0,0,-1)$ و يتناسب عكساً مع مكعب البعد عن هذا المركز بثابت تناسب λ, و المطلوب

1. عين هذا الحقل, ثم أثبت أنه حقلٌ كموني و أوجد تابع كمونه
2. أحسب العمل الذي ينجزه متجه الحقل عندما تنتقل النقطة من الموضع $B(1,2,1)$ إلى الموضع $C(3,2,1)$ ؟

السؤال الرابع: (25 درجة) المحاضرة /٦/

مجموعة مادية تتحرك في المستوي XOY مؤلفة من نقطة مادية P_1 كتلتها m_1 مربوطة بخيط مهمل الكتلة و غير قابل للامتطاط طوله l_1 طرفه الآخر مثبت في مبدأ الإحداثيات, و نقطة مادية P_2 كتلتها m_2 مثبتة بطرف قضيب مهمل الكتلة طوله l_2 طرفه الآخر مثبت في النقطة P_1. حدد عدد درجات الحرية و الوسطاء المستقلة لحركة الجملة, ثم عين شرو توازن هذه الجملة المادية ؟

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

الدكتور محمد شعيب العلي

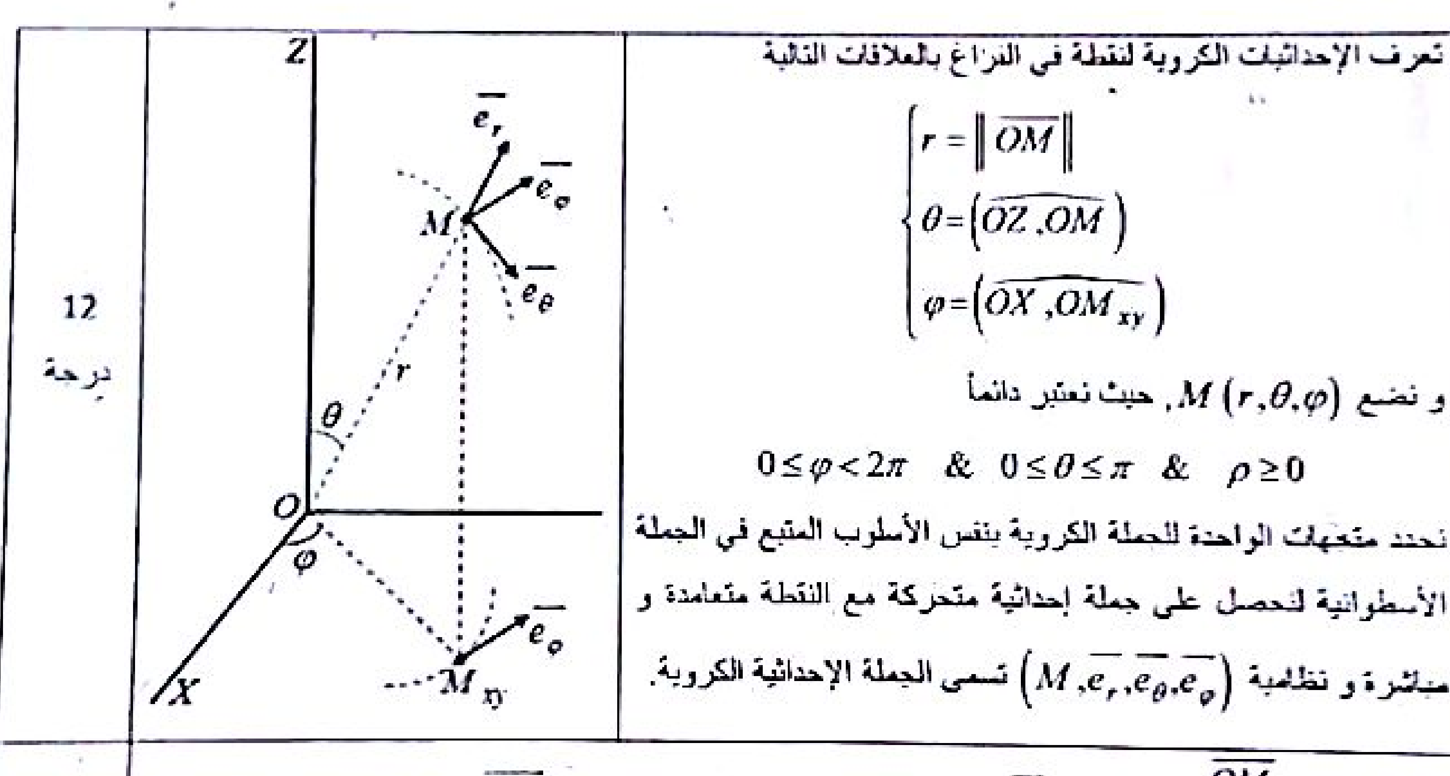


جامعة البعث / كلية العلوم / قسم الرياضيات

سلم تصحيح مادة الميكانيك (1)، لطلاب السنة الثانية / رياضيات

امتحان الدورة الاستثنائية للعام الدراسي 2013 – 2014

السؤال الأول: (25 درجة)



تعرف الإحداثيات الكروية لنقطة في الفراغ بالعلاقات التالية

$$\begin{cases} r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| \\ \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}}\right) \\ \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM}_{xy}}\right) \end{cases}$$

و نضع $M(r,\theta,\varphi)$، حيث نعتبر دائماً

$$0 \leq \varphi < 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \& \quad \rho \geq 0$$

نحدد متجهات الواحدة للجملة الكروية بنفس الأسلوب المتبع في الجملة الأسطوانية لنحصل على جملة إحداثية متحركة مع النقطة متعامدة و مباشرة و نظامية $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ تسمى الجملة الإحداثية الكروية.

درجتان

و نلاحظ أن $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}$ و أن $\overrightarrow{e_\theta}$ هو متجه عمودي على متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ ويقع في المستوي المتحرك مع النقطة ZOM و أن $\overrightarrow{e_\varphi}$ هو ذاته متجه الواحدة المعرف في الجملة الاسطوانية، كما هو موضح في الشكل (4). كما نلاحظ أن عبارة متجه الموضع في الإحداثيات الكروية تعطى بالعلاقة $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}}$.

6 درجات

و بما أن

$$\begin{cases} \dot{\overrightarrow{e_\rho}} = \theta^{\cdot}\,\overrightarrow{e_\theta} + \varphi^{\cdot}\,Sin(\theta)\overrightarrow{e_\varphi} \\ \dot{\overrightarrow{e_\theta}} = \theta^{\cdot}\,\overrightarrow{e_\rho} + \varphi^{\cdot}\,Cos(\theta)\overrightarrow{e_\varphi} \\ \dot{\overrightarrow{e_\varphi}} = -\varphi^{\cdot}\,Sin(\theta)\overrightarrow{e_\rho} - \varphi^{\cdot}\,Cos(\theta)\overrightarrow{e_\theta} \end{cases}$$

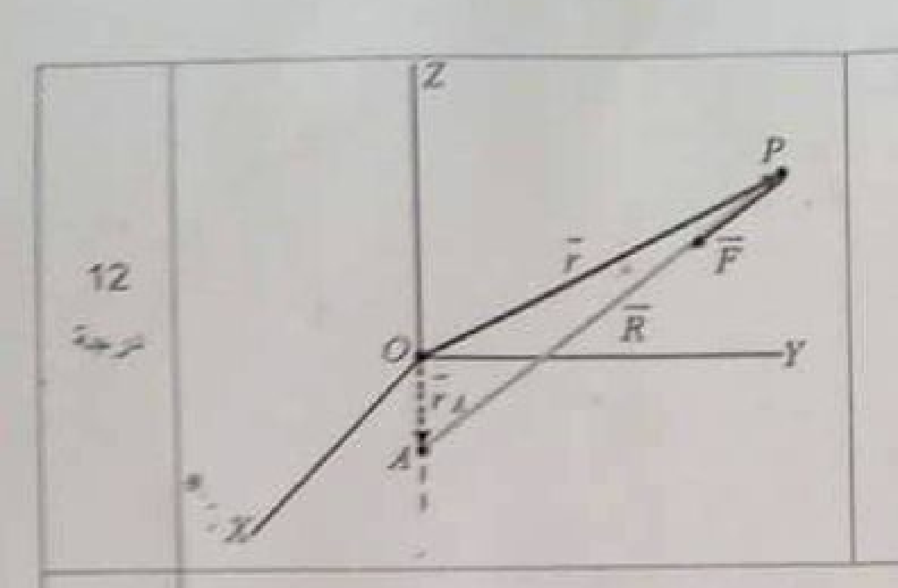
لإيجاد عبارة متجه السرعة في الإحداثيات الكروية نشتق متجه الموضع و نعوض فنجد $\vec{V} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}\left(\rho \vec{e}_\rho\right) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \rho\dot{\varphi}\,Sin(\theta)\vec{e}_\varphi$	5 درجات

السؤال الثاني: (25 درجة)

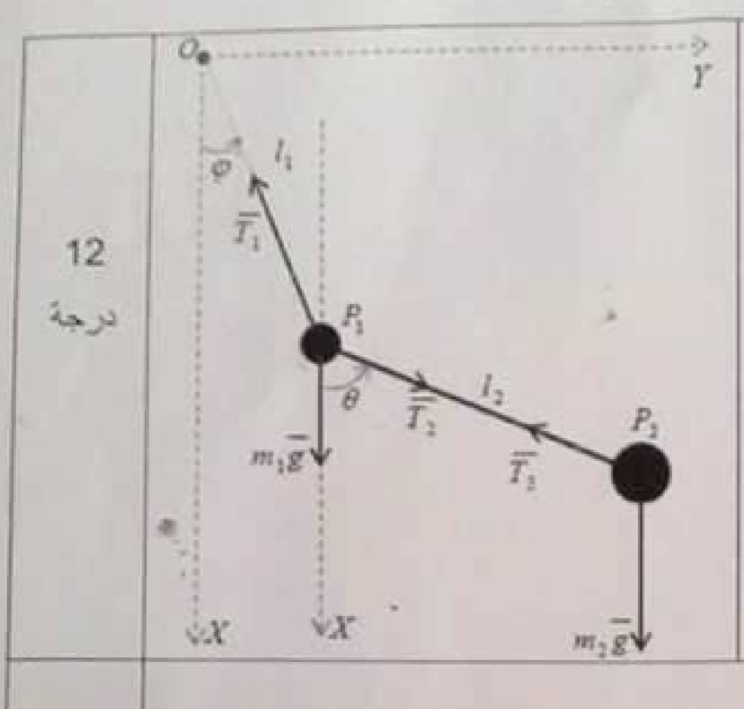
بملاحظة أن $x + y = 2h$ ، نستنتج أن حركة النقطة P هي حركة مستوية تتم في المستوي $x + y = 2h$.	درجتان
$\vec{V} = -h\,Sin(t)\,\vec{i} + h\,Sin(t)\,\vec{j} + \sqrt{2}\,h\,Cos(t)\,\vec{k} \;\Rightarrow$ $\vec{\Gamma} = -h\,Cost(t)\,\vec{i} + h\,Cos(t)\,\vec{j} - \sqrt{2}\,h\,Sin(t)\,\vec{k}$	5 درجات
معادلات المستقيم المار من النقطة P و الموازي لتسارع النقطة $\vec{\Gamma}$ تعطى في أي لحظة زمنية t بالعلاقات $\frac{x - h - h\,Cos(t)}{-h\,Cost(t)} = \frac{y - h + h\,Cos(t)}{h\,Cost(t)} = \frac{z - \sqrt{2}\,h\,Sin(t)}{-\sqrt{2}\,h\,Sin(t)}$	5 درجات
بملاحظة أن النقطة $A(h,h,0)$ تحقق معادلات المستقيم السابق في أي لحظة زمنية t، و بالتالي فإن منحى تسارع النقطة P يمر دائماً من النقطة الثابتة A في الفراغ. أي أن حركة النقطة P هي حركة مركزية في المستوي $x + y = 2h$ مركزها النقطة الثابتة A. و بالتالي حسب مبرهنة سابقة تكون حركة النقطة خاضعة لقانون السطوح.	3 درجات
$\vec{\sigma} = \overrightarrow{AP} \times \vec{V} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}\right) \times \vec{V} = \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) \times \vec{V}$ $= \left(h\,Cos(t)\,\vec{i} - h\,Cos(t)\,\vec{j} + \sqrt{2}\,h\,Sin(t)\,\vec{k}\right) \times$ $\times \left(-h\,Sin(t)\,\vec{i} + h\,Sin(t)\,\vec{j} + \sqrt{2}\,h\,Cos(t)\,\vec{k}\right) \;\Rightarrow$	6 درجات
$\vec{\sigma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h\,Cos(t) & -h\,Cos(t) & \sqrt{2}\,h\,Sin(t) \\ -h\,Sin(t) & h\,Sin(t) & \sqrt{2}\,h\,Cos(t) \end{vmatrix} = h^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Cos(t) & -Cos(t) & \sqrt{2}\,Sin(t) \\ -Sin(t) & Sin(t) & \sqrt{2}\,Cos(t) \end{vmatrix} \;\Rightarrow$ $\vec{\sigma} = h^2\left(-\sqrt{2}\,\vec{i} - \sqrt{2}\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\right)$	4 درجات



السؤال الثالث: (25 درجة)

12 درجة		بملاحظة الشكل المجاور، لنضع $\vec{r}=\overline{OP}\ ,\ \vec{R}=\overline{AP}\ ,\ \vec{r}_A=\overline{OA}$ عندئذ نجد حسب الفرض أن $\vec{F}=-\lambda\frac{1}{R^3}\frac{\vec{R}}{R}=-\lambda\frac{\vec{R}}{R^4}$ حيث أن $R=\lVert\vec{R}\rVert$.
3 درجات	كما نلاحظ أن $\vec{r}=\overline{OP}=\overline{OA}+\overline{AP}=\vec{r}_A+\vec{R}\ \Rightarrow\ d\vec{r}=d\vec{r}_A+d\vec{R}=\vec{0}+d\vec{R}=d\vec{R}$ و ذلك لأن $\vec{r}_A=\overline{Const}$.	
5 درجات	و بما أن $\vec{R}^2=R^2$ فإنه و بمفاضلة الطرفين نجد أن $\vec{R}\cdot d\vec{R}=R\ dR$، و يكون $dV=\lambda\frac{1}{R^4}R\ dR=\lambda\frac{dR}{R^3}=d\left(-\frac{\lambda}{2R^2}\right)\ \Rightarrow\ V=-\frac{\lambda}{2R^2}+D$ و هو تابع كمون الحقل حيث أن D هو ثابت يتم تعيينه من شروط كمون المسألة.	
5 درجات	و لحساب العمل، نعلم أن $W_{B\to C}=V(B)-V(C)=\left(-\frac{\lambda}{2R_B^2}+D\right)-\left(-\frac{\lambda}{2R_C^2}+D\right)=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{R_C^2}-\frac{1}{R_B^2}\right)$ $=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lVert\overline{AC}\rVert^2}-\frac{1}{\lVert\overline{AB}\rVert^2}\right)$ $=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{(3-0)^2+(2-0)^2+(1-(-1))^2}-\frac{1}{(1-0)^2+(2-0)^2+(1-(-1))^2}\right)$ $=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{9+4+4}-\frac{1}{1+4+4}\right)=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{9}\right)=-\frac{4}{153}\lambda$	

السؤال الرابع: (25 درجة)

الدرجة	الحل
12 درجة	بملاحظة الشكل المجاور، نلاحظ أن هذه الجملة مؤلفة من نقطتين ماديتين P_1 و P_2. و بما أن حركة النقطة P_1 هي حركة دائرية حول O، فيكفي لتعيينها اعتبار الزاوية φ المحصورة بين المحور OX و المتجه $\overline{OP_1}$ كوسيط لحركة هذه النقطة. و بتثبيت حركة النقطة P_1، نلاحظ أن حركة النقطة P_2 هي حركة دائرية حول P_1، فيكفي لتعيينها اعتبار الزاوية θ المحصورة بين المحور P_1X الموازي للمحور OX و المار من النقطة P_1 و المتجه $\overline{OP_1}$ كوسيط لحركة هذه النقطة P_1. و بالتالي فإن الجملة المادية المعطاة تملك درجتين من الحرية و يمكن اعتماد الوسيطين φ و θ كوسطاء مستقلة لحركة الجملة. 
6 درجات	بتطبيق المبدأ العام في التوازن في النقطة P_1 نجد $\overline{T_1}+m_1\overline{g}+\overline{T_2}=\vec{0}$ .... (i) و بإسقاط العلاقة (i) على المحورين OX و OY نجد أن $-T_1\,Cos(\varphi)+m_1g+T_2\,Cos(\theta)=0$ .... (1) $-T_1\,Sin(\varphi)+0+T_2\,Sin(\theta)=0$ .... (2)
7 درجات	بتطبيق المبدأ العام في التوازن في النقطة P_2 نجد $\overline{T_3}+m_2\overline{g}=\vec{0}$ .... (ii) و بملاحظة أن $\overline{T_3}=-\overline{T_2}$ (لكون قوى التوتر في أي نقطة من جسم غير قابل للامتطاط متساوية بالشدة)، تصبح العلاقة (ii) بالشكل $-\overline{T_2}+m_2\overline{g}=\vec{0}$ .... (iii) و بإسقاط العلاقة (iii) على المحورين OX و OY نجد أن $-T_2\,Cos(\theta)+m_2g=0$ .... (3) $T_2\,Sin(\theta)+0=0$ .... (4)

........................انتهى السلم (اربع صفحات)........................

مدرس المقرر: الدكتور محمد العلي